CÁLCULO INTEGRAL

COMPETENCIA GENERAL
Resuelve problemas con integrales de una variable real, mediante el teorema fundamental del cálculo y los métodos de integración, en su entorno académico, social y global.

UNIDAD No. **1 INTEGRAL INDEFINIDA**

COMPETENCIA PARTICULAR No. 1
Resuelve integrales indefinidas, mediante el concepto de la antiderivada y transformaciones algebraicas (cambio de variable, potencias trigonométricas), en su entorno académico.

- **Concepto de Diferencial**

FÓRMULAS DE DIFERENCIALES

$1) dc = 0$	$15) dCsc(u) = -Csc(u)Cot(u)\ du\ dx$
$2) dx = dx \to ds = ds \to dr = dr$	$16) dCtg(u) = -Csc^2(u)du\ dx$
$3) dcu = cdudx$	$17) dArcSen(u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}dx$
$4)\ d(u+v+w) = (dw+dv+du)dx$	$18) dArcSen(u) = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}dx$
$5) duv = (udv+vdu)dx$	$19) dArcTan(u) = \frac{du}{1+u^2}dx$
$6) d\frac{u}{v}dx = \left(\frac{vdu-udv}{v^2}\right)dx$	$20) dArcCtg(u) = \frac{-du}{1+u^2}dx$
$7) du^n = nu^{n-1}du$dx	$21) dSec(u) = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$
$8) d\sqrt{u} = \left(\frac{du}{2\sqrt{u}}\right)dx$	$22) dSec(u) = \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}}$
$9) d\frac{c}{u} = \left(-c\frac{du}{u^2}\right)dx$	$23) dln(u) = \frac{du}{u}dx$

$10) d\frac{u}{c} = \left(\frac{du}{c}\right) dx$	$24) dlog(u) = \frac{\log(e) du}{u} dx$
$11) dSen(u) = Cos(u)\, du\, dx$	$25) da^u = a^u \ln(a) dudx$ln
$12) dCos(u) = -Sen(u)\, du\, dx$	$26) de^u = e^u dudx$
$13) dTan(u) = Sec^2(u) du\, dx$	$27) du^v = vu^{v-1}du + \ln(u)u^v dvdx$
$14) dSec(u) = Sec(u)Tan(u)\, du\, dx$	

I. Obtener las diferenciales de las siguientes funciones

	Soluciones
$1) y = 3x^3 + 12x^2 - 8x$	$dy = (9x^2 + 24x - 8)dx$
$2)\ y = \frac{3x^2 - 4x}{2x - 4}$	$dy = \left(\frac{6x^2 - 24x + 16}{(2x-4)^2}\right) dx$
$3)\ y = \sqrt[3]{6x + 2}$	$dy = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}\right) dx$
$4)\ y = Sen(4x^2 + 9x)$	$dy = Cos(4x^2 + 9x)(8x + 9)dx$
$5)\ y = Tan\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)$	$dy = \frac{5}{(x-1)^2} Sec^2\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) dx$
$6)\ y = ArcCos\left(\frac{x}{x-5}\right)$	$dy = \left(\frac{5}{(x-5)\sqrt{-10x+25}}\right) dx$
$7)\ y = \sqrt{3x^2 - 2x}$	$dy = \left(\frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}\right) dx$
$8)\ y = \frac{3}{(2x^2 - x)^3}$	$dy = \left[\frac{9 - 36x}{(2x^2 - x)^4}\right] dx$

9) $y = \frac{5x+2}{x-4}$	$dy = -\left[\frac{22}{(x-4)^2}\right]dx$
10) $y = ln\left(\sqrt{3x^2+2x}\right)$	$dy = \left(\frac{3x+1}{3x^2+2x}\right)dx$

- **Integrales por formulario**

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

1) $\int dx = x + C$
2) $\int cudu = c\int udu + C$
3) $\int (u+v+w)dx = \int udx + \int vdx + \int wdx + C$
4) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}du + C$ 5) $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$
6) $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$ 7) $\int e^u\, du = e^u + C$
8) $\int senudu = -cosu + C$ 9) $\int cosudu = senu + C$
11) $\int sec^2udu = tanu + C$ 12) $\int csc^2udu = -ctgu + C$
13) $\int secu\, tanu\, du = secu + C$ 14) $\int cscu\, cotudu = -\, cscu + C$
15) $\int tanudu = ln|secu| + C$ 16) $\int cotudu = ln|senu| + C$
16) $\int secudu = ln(secu + tanu) + C$ 18) $\int cscudu = ln(cscu - cotu) + C$
17) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{u}{a} + C$
18) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
19) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$
20) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsen\frac{u}{a} + C$
21) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$
22) $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}arcsen\frac{u}{a} + C$
23) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

II. Realiza las siguientes integrales algebraicas con el uso de formulario

	Soluciones
1) $\int x^{\frac{3}{5}} dx$	$= \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8} + C$
2) $\int (3x^3 + 4x^2 - 8x + 9)dx$	$= \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9x + C$
3) $\int \frac{dx}{x^7}$	$= -\frac{1}{6x^6} + C$
4) $\int (-3\sqrt{x} - \frac{5}{7\sqrt{x}} + \frac{3}{2x^2})dx$	$= -2x\sqrt{x} - \frac{10\sqrt{x}}{7} - \frac{3}{2x} + C$
5) $\int \frac{x^3-4x^2+8}{x^2} dx$	$= \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{8}{x} + C$
6) $\int (\frac{2}{x^3} - \frac{5x}{\sqrt[3]{x^2}} + 3)dx$	$-\frac{1}{x^2} + \frac{15\sqrt[3]{x^4}}{4} + 3x + C$
7) $\int (3x-5)^3 dx$	$= 27\frac{x^4}{4} - 135\frac{x^3}{3} + 225\frac{x^2}{2} - 125x + C$ ó $= \frac{(3x-5)^4}{12} + C$
8) $\int (2x^2-6)^3 dx$	$= \frac{8x^7}{7} - \frac{72x^5}{5} + 72x^3 - 216x + C$
9) $\int (2x^2-6)^3 x dx$	$= \frac{(2x^2-6)^4}{16} + C$
10) $\int \sqrt[3]{(a+bx)^2} dx$	$= \frac{3(a+bx)^{\frac{5}{3}}}{5b} + C$
11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x-7\right)^2}}$	$= 2\left(\frac{3}{2}x - 7\right)^{\frac{1}{3}} + C$
12) $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - x^5\right) dx$	$= 6\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} - \frac{x^6}{6} + C$
13) $\int \frac{5}{x^3} dx$	$= -\frac{5}{2x^2} + C$
14) $\int \frac{8}{x} dx$	$= 8ln\|x\| + C$
15) $\int \frac{6x^2-x-2}{2x+1} dx$	$= \frac{3x^2}{2} - 2x + C$
16) $\int (4x+2)dx$	$= \frac{(4x+2)^2}{8} + C$
17) $\int Sen^3 5x Cos 5x dx$	$= \frac{Sen^4 5x}{20} + C$
18) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$	$= \frac{\sqrt[3]{(9x-2)^2}}{6} + C$
19) $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2 dx$	$= \frac{(1-e^{3x})^3}{9} + C$

20) $\int csc^2x\sqrt{5+cotx}dx$	$=-\frac{2\sqrt{(5+cotx)^3}}{3}+C$
21) $\int \frac{x^2-8x+15}{x-3}dx$	$=\frac{x^2}{2}-5x+C$
22) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$	$=\frac{3}{2}(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}+C$
23) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+4}}dx$	$=2\sqrt{x^3+4}+C$
24) $\int \frac{x^3dx}{x^4+2}$	$=\frac{1}{4}ln\lvert x^4+2\rvert+C$
25) $\int \frac{x^2dx}{3x^3-8}$	$=\frac{1}{9}ln\lvert 3x^3-8\rvert+C$
26) $\int \frac{cosx}{sen^2x}dx$	$=-\frac{1}{senx}+C$
27) $\int e^{2x}sen(e^{2x})dx$	$=-\frac{1}{2}\cos(e^{2x})+C$
28) $\int \frac{x^3-x^2-3x+5}{x+5}\mathrm{dx}$	$=\frac{x^3}{3}-3x^2+27x-130ln\lvert x+5\rvert+C$
29) $\int tan^5 6x * sec^2 6x)dx$	$=\frac{tan^6 6x}{36}+C$
30) $\int \frac{x-4}{\sqrt{4x^2-32x-1}}dx$	$=\frac{\sqrt{4x^2-32x-1}}{4}+C$
31) $\int \frac{x^2}{x^3-2}dx$	$=\frac{1}{3}ln\lvert x^3-2\rvert+C=ln(x^3-2)^{\frac{1}{3}}+C$

III. Integrales exponenciales

	Soluciones
32) $\int e^{5x}dx$	$=\frac{1}{5}e^{5x}+C$
33) $\int 3e^{4x}\,dx$	$=\frac{3}{4}e^{4x}+C$
34) $\int 2e^{3x+2}\,dx$	$=\frac{2e^{3x+2}}{3}+C$
35) $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$	$=3e^{\frac{x}{3}}+C$
36) $\int e^{5x-3}\,dx$	$=\frac{e^{5x-3}}{5}+C$
37) $\int e^{cos2x}\,sen2xdx$	$=-\frac{e^{cos2x}}{2}+C$
38) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{e^{3x}}}$	$=-\frac{1}{e^x}+C$
39) $\int 5^{2x}\,dx$	$=\frac{5^{2x}}{2ln5}+C$

40) $\int (2x^3 - x)e^{x^4-x^2}\, dx$	$= \frac{e^{x^4-x^2}}{2} + C$
41) $\int \frac{dx}{8^{3x}}$	$= -\frac{1}{3ln8 \cdot 8^{3x}} + C$
42) $\int 8^{2x-3}\, dx$	$= \frac{8^{2x-3}}{3ln8 \cdot 8^{3x}} + C$
43) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$	$-\frac{\boldsymbol{e^{\frac{1}{x^2}}}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$
44) $\int \frac{(e^{4x-5})}{e^{2x}} dx$	$\frac{1}{2}(e^{2x} + 5e^{-2x}) + C$

IV. Integrales de funciones trigonométricas

	Soluciones
45) $\int sen\ 7xdx$	$= -\frac{cos\ 7x}{7} + C$
46) $\int 5x^2 sec^2(9x^3 + 3)dx$	$= \frac{5tan(9x^3 + 3)}{27} + C$
47) $\int 4x^3 \sec 3x^4 \tan 3x^4\, dx$	$= \frac{sec\ 3x^4}{3} + C = \frac{1}{3cos\ 3x^4} + C$
48) $\int -2x\ tan2x^2 dx$	$= \frac{1}{2} ln\lvert cos2x^2\rvert + C$
49) $\int \mathrm{x} \cot(3 - 5x^2)\, dx$	$= -\frac{1}{10} ln\lvert sen(3 - 5x^2)\rvert + C$
50) $\int \frac{3}{5} sen\ 3xdx$	$= -\frac{cos\ 3x}{5} + C$
51) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}} \csc \sqrt{x-3}\ cot\sqrt{x-3} dx$	$= -2csc\sqrt{x-3} + C$
52) $\int -8x\ sen\ 3x^2 dx$	$= \frac{4cos\ 3x^2}{3} + C$
53) $\int -2csc^2 2x\ dx$	$= cot\ 2x + C$
54) $\int 3x^2 \cos(7x^3 - 5)\, dx$	$= \frac{1}{7} sen(7x^3 - 5) + C$
55) $\int (csc3x - cot3x)^2 dx$	$= \frac{2}{3}(csc3x - cot3x) - x + C$
56) $\int (4x - csc^2\ x)dx$	$= 2x^2 + cot\ x + C$
57) $\int \frac{cos3x\ dx}{1+sen3x} dx$	$= \frac{1}{3} ln\lvert sen\ 3x\rvert + C$
58) $\int e^{4x} sen(e^{4x})dx$	$= -\frac{cos\ e^{4x}}{4} + C$
59) $\int \frac{dx}{sen^2 6x}$	$= -\frac{cot\ 6x}{6} + C$
60) $\int \frac{(x-5)dx}{\sec\,(x^2-10x)} dx$	$= \frac{sen\ (x^2 - 10x)}{2} + C$

61) $\int \frac{sec^2 5x}{\tan 5x} dx$	$= \frac{ln\lvert tan5x\rvert}{5} + C$

V. Integrales que contienen expresiones de la forma

$$\sqrt{v^2 \pm a^2}, \quad \sqrt{a^2 - v^2}, \quad v^2 \pm a^2, \quad a^2 - v^2$$

	Soluciones
62) $\int \frac{dx}{7x^2+5}$	$= \frac{1}{\sqrt{35}} arc\ tan \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{5}} + c$
63) $\int \frac{dx}{25-4x^2}$	$= \frac{1}{20} ln \left(\frac{5+2x}{5-2x}\right) + C$
64) $\int \frac{x-5}{\sqrt{4x^2+9}} dx$	$= (4x^2+9)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} ln \left\lvert 2x + \sqrt{4x^2+9} \right\rvert + c$
65) $\int \frac{dx}{9x^2-16}$	$= \frac{1}{24} ln \left\lvert \frac{3x-4}{3x+4} \right\rvert + c$
66) $\int \frac{x}{25+x^4} dx$	$= \frac{1}{10} arc\ tan \frac{x^2}{5} + C$
67) $\int \frac{x^3+3x+7}{x^2-1} dx$	$= \frac{x^2}{2} + 2ln\lvert x^2-1\rvert + \frac{7}{2} ln \left\lvert \frac{x-1}{x+1} \right\rvert + c$
68) $\int \frac{dx}{4x^2-9} =$	$= \frac{1}{12} ln \left\lvert \frac{2x-3}{2x+3} \right\rvert + C$
69) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$	$= \frac{1}{4} \ln \left\lvert \frac{x-5}{x-1} \right\rvert + C$
70) $\int \frac{dx}{x^2+5x-14}$	$= \frac{1}{9} \ln \left\lvert \frac{x-2}{x+7} \right\rvert + C$
71) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$	$= \ln \left\lvert 2t + 1 + 2\sqrt{t^2+t+1} \right\rvert + C$
72) $\int \sqrt{3x-x^2}\, dx$	$= \left(\frac{2x-3}{4}\right) \sqrt{3x-x^2} + \frac{9}{8} arc\ sen \left(\frac{2x-3}{3}\right) + C$

UNIDAD No. **2 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN**

COMPETENCIA PARTICULAR No. 2
Resuelve integrales empleando los métodos de integración (por partes, sustitución trigonométrica, fracciones parciales), en su entorno académico.

- **Por Partes**

$$\boxed{FÓRMULA \quad \int udv = uv - \int vdu}$$

Se aplica en los siguientes productos de funciones:

a) algebraicas por trigonométricas
b) algebraicas por exponenciales
c) exponenciales por trigonométricas
d) logarítmicas
e) logarítmicas por algebraicas
f) trigonométricas inversas
g) trigonométricas inversas por algebraicas

	Soluciones
1) $\int arc\ tan 4x dx$	$= x\ arc\ tan\ 4x - \frac{1}{8} ln(16x^2+1) + C$
2) $\int x\ e^{3x} dx$	$= \frac{x\ e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$
3) $\int x^2\ cos 3x\ dx$	$= \frac{x^2 sen\ 3x}{3} + \frac{2x \cos 3x}{9} - \frac{2\ sen\ 3x}{27} + C$
4) $\int x\ ln\ x\ dx$	$= \frac{x^2 ln\lvert x\rvert}{2} - \frac{x^2}{4} + C$
5) $\int arc\ tan\ x\ dx$	$= x\ arc\ tan\ x - \frac{1}{2} ln(x^2+1) + C$
6) $\int 3x\ sen\ 2x\ dx$	$= -\frac{3}{2} x\ cos\ 2x + \frac{3}{4} sen\ 2x + C$
7) $\int x^2\ cosx\ dx$	$= x^2\ sen\ x + 2x\ cos\ x - 2\ sen\ x + C$
8) $\int x^2 ln\ x\ dx$	$= \frac{x^3 ln\lvert x\rvert}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
9) $\int x\ sen\ \frac{x}{3}\ dx$	$= -3x\ cos\ \frac{x}{3} - 9 sen\ \frac{x}{3} + C$

10) $\int x\,csc^2x\,dx$	$= -x\cot x + ln\lvert sen\,x\rvert + C$
11) $\int e^{2x}\,sen\,2x\,dx$	$= \frac{e^{2x}}{4}(sen\,2x - cos\,2x) + C$
12) $\int 5ln\,2x^2\;dx$	$= 5(x\,ln2x^2 - 2x) + C$
13) $\int arc\,sen\,5x\,dx$	$= xarc\,sen\,5x + \frac{\sqrt{1-25x^2}}{5} + C$
14) $\int (x^2+6x)cos\,2x\;dx$	$= \frac{(x^2+6x)sen\,2x}{2} + \frac{(2x+6)cos\,2x}{4} + \frac{sen\,2x}{4} + C$
15) $\int x^3 ln\frac{x}{4}dx$	$= \frac{x^4 ln\lvert x\rvert}{4} - \frac{x^4}{16} - \frac{ln2 + lnx^4}{2} + C$
16) $\int 4xe^{2x}dx$	$= 2x\,e^{2x} - e^{2x} + C$
17) $\int x^3e^x\,dx =$	$= \mathrm{x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C}$ ó $\mathrm{e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C}$
18) $\int x^2cos4x\,dx =$	$= \frac{\mathrm{x^2sen4x}}{4} + \frac{\mathrm{x\,cos4x}}{8} - \frac{\mathrm{sen4x}}{32} + \mathrm{C}$
19) $\int x^2\ln(5x)\,dx =$	$= \frac{\mathrm{x^3}}{2}\ln\lvert 5\mathrm{x}\rvert - \frac{1}{9}\mathrm{x^3} + \mathrm{C}$
20) $\int t\,\mathrm{arcsec}2\,t\,dt =$	$= \frac{\mathrm{t^2\,arcsec\,2t}}{2} - \frac{\sqrt{4\mathrm{t^2}-1}}{8} + \mathrm{C}$
21) $\int sec^3(3x)\,dx =$	$= \frac{\mathrm{sec3xtan3x}}{6} + \frac{\mathrm{ln\lvert sec3x + tan3x\rvert}}{6} + \mathrm{C}$

- **Potencias Trigonométricas**

FORMULARIO DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	
$sen^2x + cos^2x = 1$	$sen^2x = 1 - cos^2x$ $cos^2x = 1 - sen^2x$
$sen^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$	$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
$senx\ cosx = \frac{1}{2}sen2x$ $sen2x = 2senxcosx$	$\cos 2x = 1 - 2\ sen^2x$
$tan^2x + 1 = sec^2x$	$tan^2x = sec^2x - 1$
$1 + cot^2x = csc^2x$	$cot^2x = csc^2x - 1$

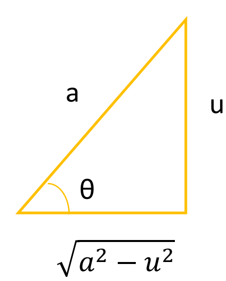
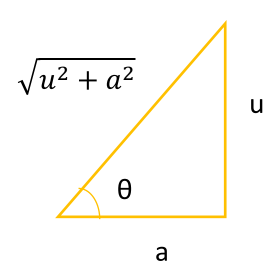
Resuelve las siguientes integrales:

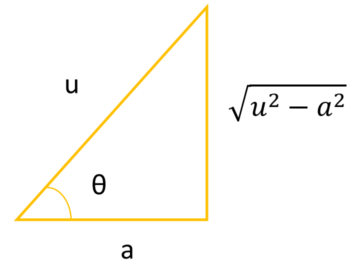
	Soluciones
22) $\int sen^3 4x \cos 4x\ dx$	$\frac{1}{16}\ sen^4 4x + C$
23) $\int sen^3 5x\ dx$	$\frac{1}{15}cos^3 5x - \frac{1}{5}\cos 5x + C$
24) $\int cos^5\ y\ dy$	$sen\ y - \frac{2}{3}sen^3 y + \frac{1}{5}sen^5 y + C$
25) $\int sen^3\ 4xcos^5 4x\ dx$	$-\frac{1}{24}cos^6\ 4x + \frac{1}{32}cos^8 4x + C$
26) $\int tan^3 5x\ dx$	$\frac{1}{10}tan^2 5x + \frac{1}{5}ln\lvert\cos 5x\rvert + C$
27) $\int cot^5\ 6xdx$	$-\frac{cot^4 6x}{24} + \frac{cot^2 6x}{12} + \frac{1}{6}ln\lvert sen6x\rvert + C$

28) $\int csc^4\, 9x\, dx$	$-\frac{1}{9}cot9x - \frac{1}{27}cot^3 9x + C$
29) $\int sec^4 \frac{2x}{3}\, dx$	$\frac{3}{2}tan\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}tan^3\frac{2x}{3} + C$
30) $\int tan^3\, 5x\, sec^3 5xdx$	$\frac{1}{25}sec^5 5x - \frac{1}{15}sec^3 5x + C$
31) $\int tan^5\, x \sec x\; dx$	$\frac{1}{5}sec^5 x - \frac{2}{3}sec^3 x + secx + C$
32) $\int sen^2\, \frac{x}{5}\, dx$	$\frac{x}{2} - \frac{5}{4}sen\frac{2x}{5} + C$
33) $\int cos^4\, 9x\, dx$	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{36}sen\ 18x + \frac{1}{288}sen36x + C$

- **Sustitución Trigonométrica**

Sustitución trigonométrica

CASO	CAMBIO	TRIÁNGULO
$\sqrt{\boldsymbol{a^2 - u^2}}$	$u = a \operatorname{sen}\theta$ $su\ diferencial$ $du = a\cos\theta\, d\theta$ $transformación:$ $\sqrt{\boldsymbol{a^2\ - u^2}} = a\cos\theta$	
CASO $\sqrt{\boldsymbol{u^2 + a^2}}\ \ \boldsymbol{o}\ \sqrt{\boldsymbol{a^2 + u^2}}$	**CAMBIO** $u = a\tan\theta$ $su\ diderencial$ $du = a\ sec^2\theta\ d\theta$ $transformación:$ $\sqrt{\boldsymbol{u^2 + a^2}} = a\sec\theta$	**TRIÁNGULO** 

CASO	CAMBIO	TRIÁNGULO
$\sqrt{\boldsymbol{u^2 - a^2}}$	$u = a\sec\theta$ $su\ diderencial$ $du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ $transformación$: $\sqrt{\boldsymbol{u^2 \ - a^2}} = a\tan\theta$	

	Soluciones
34) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} =$	$= -\sqrt{4-x^2} + C$
35) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-16}}dx =$	$= \frac{(x^2-16)\sqrt{x^2-16}}{25x} + 16\sqrt{x^2-16} + C$
36) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx =$	$= \frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+9} - 6\sqrt{x^2+9} + C$
37) $\int \sqrt{9-x^2}dx$	$= \frac{9\ arc\ sen\ \frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2}}{2} + C$
38) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2\sqrt{25-x^2}}}\boldsymbol{dx} =$	$= -\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C$
39) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{x^2+8}}} =$	$= \frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{8}}{x}\right\rvert + C$
40) $\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}}\boldsymbol{dx} =$	$= -\frac{1}{3(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} + C$
41) $\int \sqrt{\boldsymbol{1-4x^2}}\,\boldsymbol{dx} =$	$= \frac{1}{4}\text{ arc sen }(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$
42) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2\sqrt{x^2-81}}} =$	$= \frac{\sqrt{x^2-81}}{81x} + C$
43) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(5-4x-x^2)^{\frac{5}{2}}}} =$	$= \frac{(x+2)^3}{243\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} + \frac{x+2}{81\sqrt{5-4x-x^2}} + C$
44) $\int \frac{\sqrt{49-x^2}}{x^2}dx =$	$= -\frac{\sqrt{49-x^2}}{x} - \text{arc sen }\frac{x}{7} + C$
45) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} =$	$= \frac{1}{3}\ln\left\lvert x + \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x}\right\rvert + C$

Fracciones Parciales

FRACCIONES PARCIALES		
	Factor	Fracción que se forma
CASO I	*Lineal* $ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$
CASO II	*Lineal que se repite* $(ax+b)^n$	$\frac{A}{a_1x+b_1}+\frac{B}{(a_2x+b_2)^2}+\cdots+\frac{M}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{N}{(a_nx+b_n)^n}$
CASO III	*Cuadrático* ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
CASO IV	*Cuadrático que se repite* $(ax^2+bx+c)^n$	$\frac{Ax+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\dots\dots\dots.\frac{Mx+N}{(a_nx^2+b_nx+c_n)^n}$

	Soluciones
46) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$	$= ln\left\|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right\|+C$
47) $\int \frac{x^3+x}{x+1}dx$	$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x-2n\|x+1\|+C$
48) $\int \frac{(x-18)dx}{4x^3+9x}$	$= ln\left\|\frac{4x^2+9}{x^2}\right\|+\frac{1}{6}arc\tan\frac{2x}{3}+C$
49) $\int \frac{2x^2-7x+4}{x-1}dx$	$=x^2-5x-ln\|x-1\|+c$
50) $\int \frac{dz}{z^4+z^2}$	$=-\frac{1}{z}-arc\tan z+C$
51) $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$	$= ln\left\|\frac{x^2(2x-1)^{\frac{1}{10}}}{(x+2)^{\frac{1}{10}}}\right\|+C$
52) $\int \frac{(x^3+3x)dx}{(x^2+1)^2}$	$=\frac{1}{2}ln\|x^2+1\|-\frac{1}{x^2+1}+C$
53) $\int \frac{3-5x}{x^3-6x^2+9x}dx$	$=\frac{4}{x-3}+\frac{1}{3}ln\left\|\frac{x}{x-3}\right\|+C$

54) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$	$=\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|+C$
55) $\int \frac{(x^5+9x^3+9x^2-9)dx}{x^3-9x}$	$=\frac{x^3}{3}+18x+ln\left\|\frac{x(x-3)^3}{(x+3)^{23}}\right\|+C$
56) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$	$=ln\left\|x\sqrt{x^2+4}\right\|-\frac{1}{2}arc\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$
57) $\int \frac{(2y^3+y^2+2y+2)dy}{y^4+3y^2+2}$	$=ln\|y^2+2\|+arc\tan y+C$
58) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$	$=ln\left\|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\|-arc\tan x-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$
59) $\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$	$=arc\tan x+\frac{1}{x+1}+C$
60) $\int \frac{(x^5+9x^3-9x^2-9)dx}{x^3+9x}$	$=\frac{x^3}{3}-ln\|x(x^2+9)^4\|+C$

UNIDAD No. **3 INTEGRAL DEFINIDA**

COMPETENCIA PARTICULAR No. 3
Resuelve problemas de la integral definida (área bajo la curva,...) en su entorno académico, social y global.

- **Integral Definida**

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que el problema de calcular el área bajo la curva determinada por $f(x)$ en el intervalo $x \in [a,b]$ se reduce a calcular la diferencia de la función $F(x)$ en los puntos extremos del intervalo.

$$Integral\ definida \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

Donde $a = límite\ inferior\ \ y\ \ b = límite\ superior$

	Soluciones
1) $\int_{-2}^{5}(x^2-3x+3)dx$	$=\frac{203}{6}=33.83$
2) $\int_{-1}^{3}(x+4)dx$	$=20$
3) $\int_{0}^{4}(\sqrt{x}+3x)dx$	$=\frac{88}{3}=29.3$
4) $\int_{0}^{4}\sqrt{x+2}dx$	$=7.912$
5) $\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx$	$=\frac{9}{2}=4.5$
6) $\int_{0}^{8}\frac{2dx}{x+3}$	$=2ln\left(\frac{11}{3}\right)=2.598$
7) $\int_{0}^{2}xe^{x}dx$	$=e^2+1=8.389$
8) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}}sen\,2xdx$	$=0.1398$
9) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	$=\frac{\pi}{3}=1.047$
10) $\int_{3}^{6}\frac{dx}{x^2-3x+2}$	$=ln\left(\frac{8}{5}\right)=0.470$
11) $\int_{3}^{5}\frac{(7x-11)dx}{x^2-3x+2}$	$=6.068$
12) $\int_{0}^{6}\sqrt{36-x^2}dx$	$=9\pi=28.274$

➢ Área bajo la curva

El área limitada por la curva $y = f(x)\ continua\ en\ [a,b], el\ eje\ X\ y\ las\ rectas\ x = a, x = b$ es:

$$Área = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx$$

El área limitada por la curva $y = f(y)\ continua\ en\ [c,d], el\ eje\ Y\ y\ las\ rectas\ y = c, y = d$ es:

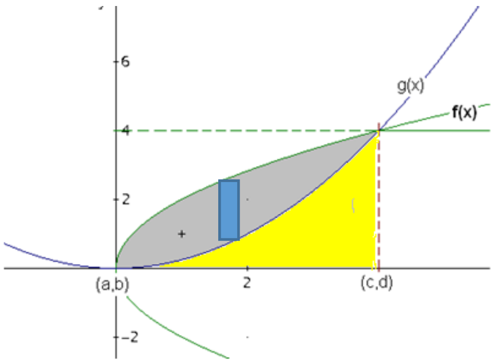
$$Área = \int_c^d f(y)dy = \int_c^d x\,dy$$

	Soluciones
13) $Hallar\ el\ área\ limitada\ por\ la\ curva$ $f(x) = 2x - 3, el\ eje\ x\ y\ las\ rectas\ x = 2\ \ y\ x = 7$	$A = 30\ u^2$
14) $Calcula\ el\ área\ bajo\ la\ curva\ y = x^2 + 2x + 3$ $limitada\ po\ el\ eje\ x\ y\ las\ rectas\ x = -3\ \ y\ x = 3$	$A = 36\ u^2$
15) $Determina\ el\ área\ limitada\ por\ la\ función$ $f(x) = 4 - x^2, el\ eje\ x\ y\ las\ rectas\ x = -1, x = 2$	$A = 9\ u^2$
16) $Calcula\ el\ área\ bajo\ la\ curva\ y^2 = x$ $limitada\ po\ el\ eje\ y\ y\ las\ rectas\ x = -3\ \ y\ x = 3$	$A = 18\ u^2$
17) $Calcula\ el\ área\ bajo\ la\ curva\ \ f(x) = x^3 + 8$ $limitada\ po\ el\ eje\ x\ y\ las\ rectas\ x = -2\ \ y\ x = 3$	$A = \frac{225}{4}\ u^2$
18) $Calcula\ el\ área\ que\ forma\ \ la\ curva$ $f(x) = x^2 - 6x - 3\ con\ el\ eje\ x$	$A = 55.425\ u^2$
19) $Determina\ el\ área\ limitada\ por\ la\ función$ $4 - 6x - 7y = 0, el\ eje\ x\ y\ las\ rectas\ y = -4, y = 3$	$A = 7\ u^2$
20) $Calcula\ el\ área\ de\ la\ curva$ $f(x) = 6x^2 - x^3\ limitada\ por\ el\ eje\ de\ las\ abscisas$	$A = 4\ u^2$

Área entre curvas

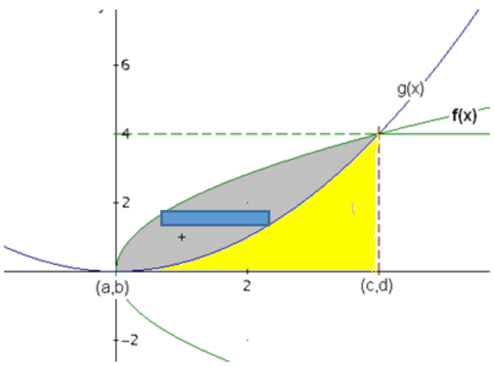
Si tenemos 2 funciones $f(x)$ y $g(x)$ las cuales son continuas y $f(x) \geq g(x)$

$A = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx$ Si tomamos una franja representativa vertical



ó

$A = \int_b^d (g(y) - f(y))\,dy$ Si tomamos una franja representativa horizontal



	Soluciones
21) Obtener el área limitada por las siguientes curvas $y^2 = 6x$ y $x^2 = 6y$	$A = 12\,u^2$
22) Hallar el área limitada por las curvas: $y^2 = 4x, 2x - y = 4$	$A = 9\,u^2$
23) Hallar el área comprendida entre la curva $y = 9 - x^2$ *y la curva* $y = x + 3$.	$A = \frac{125}{6}\,u^2$

24) Obtén el área limitada entre las curvas $y = 4x - x^2$, $y = x^2$	$A = \frac{8}{3}\, u^2$
25) Encuentra el área limitada por las curvas $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$, $y = 2x + 3$	$A = 9\, u^2$
26) Hallar el área comprendida entre la curva $x^2 + y^2 = 18$ *y la curva* $x^2 = 6y - 9$.	$A = 1.237\ u^2$
27) Obtener el área limitada por las siguientes curvas $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$ $y = 5 - 6x$	$A = 249.75\, u^2$
28) Hallar el área comprendida entre la curva $y = 5 - 6x - x^2$ *y la curva* $y = -2x$.	$A = 36\, u^2$
29) Calcula el área limitada por las funciones $g(x) = x^2 + 2$ y $f(x) = 1 - x$ *y entre las rectas* $x = 0$ y $x = 1$	$A = \frac{11}{6}\, u^2$
30) Obtén el área limitada por lar curvas $y^2 = 4x$ y $4x + y - 6 = 0$	$A = \frac{125}{24}\, u^2$
31) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$	$A = \frac{5}{12}\, u^2$

- **Volumen de sólidos de revolución**

Cuando el eje de rotación es el eje “x”

El volumen del solido de revolución generado al girar el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$se obtiene empleando la siguiente fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Cuando el eje de rotación es el eje ”y”

Si el área gira en torno del eje “y” se usa la formula:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, dy$$

	Soluciones
$32)\ f(x) = \sqrt{x}$ entre $x = 1$, $x = 3$ y $y = 0$	$V = \frac{5\pi}{2}\ u^3$
$33)\ y = \sqrt{9 - x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 3$	$V = 18\pi\ u^3$
$34)\ = f(x) = x^3 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$	$V = \frac{198}{7}\ u^3$
$35)\ x = \sqrt{y^3}$ entre $y = 4$ y $y = 0$	$V = 64\pi\ u^3$
$36)\ x = y^{\frac{2}{3}}$ entre $y = 8$ y $y = 0$	$V = \frac{384\pi}{7}\ u^3$
$37)\ x = \sqrt{4 - y^2}$ entre $y = 0$ y $y = 2$	$V = \frac{16\pi}{3}\ u^3$