

# El trabajo documental de un futuro profesor de matemáticas al incorporar un Applet de geometría

Elena Freire Gard

Instituto de Profesores Artigas de Montevideo-Uruguay

Isaías Miranda

Instituto Politécnico Nacional

## **Resumen**

Con base en el Enfoque Documental de lo Didáctico, y en las tres maneras en que profesores usan la tecnología en el aula de clases (reemplazo, amplificador y transformador), identificadas por Hughes, en este artículo se analiza el trabajo documental de David, un futuro profesor de matemáticas que incorpora un re-curso digital en una de sus planificaciones de clase y lo utiliza en una de sus prácticas de enseñanza. La metodología es cualitativa, en su modalidad de estudio de caso. El análisis se hizo en cuatro fases: previo y durante la elaboración de la planificación; durante y después de la implementación de esta. Los resultados indican que el trabajo documental de David difiere en cada una de las fases. Se concluye que el trabajo documental es un proceso que permite al futuro profesor desenvolverse con mayor experiencia y conocimientos sobre el uso de los recursos digitales.

## **The documentary work of a prospective mathematics teacher incorporating a geometry Applet**

## **Abstract**

Based on the Documentary Approach to Didactics, and on the three ways teachers use technology in the classroom (replacement, amplifie , and transformer), identified by Hughes, this article analyzes the documentary work of David, a future math teacher. He incorporates a digital resource into his lesson plans and uses it in his teaching practices. The methodology is qualitative in its case study modality. The analysis was divided into four phases: before and during the planning preparation and during and after its implementation. The results indicate that David's documentary work differs in each phase. We conclude that documentary work is a process that allows the future teacher to develop with more significant experience and knowledge about the use of digital resources.

## **Palabras clave**

Enfoque Documental de lo Didáctico, Enseñanza de las matemáticas con tecnologías, Formación de profesores, Futuro profesor de matemáticas, Trabajo documental.

## **Keywords**

Documentary Approach to Didactics, Documentary work, Prospective mathematics teacher, Teaching of mathematics with technologies, Teacher training.

**Recibido:** 27/01/2021

**Aceptado:** 26/11/2021

## Introducción

La incorporación de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas ha influenciado en la forma de aprender y de enseñar esta disciplina (Sacristán, Calder, Rojano, Santos, Friedlander y Meissner, 2010). En particular, varios investigadores en Educación Matemática han expresado los beneficios de incorporar este tipo de tecnologías<sup>1</sup> en la enseñanza de la geometría (Acosta y Fiallo, 2017; Hollebrands y Okumus, 2018; Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer, 2006). Uno de esos beneficios es que, en unos pocos instantes, permite a los estudiantes tener múltiples construcciones de objetos geométricos al utilizar herramientas como “el arrastre” (Hollebrands y Okumus, 2018). Este tipo de herramienta brinda la oportunidad de que los propios estudiantes identifiquen propiedades geométricas o reconozcan si sus propias construcciones han respetado las características de la figura que se buscó construir (Acosta y Fiallo, 2017).

Ahora bien, la incorporación de las tecnologías en el aula no es una acción fácil de realizar. Algunos reportes de investigación ponen de manifiesto que los profesores de matemáticas experimentan dificultades en el uso de tecnologías digitales durante su práctica de enseñanza (Artigue, 2015; Drijvers, Ball, Barzel, Heid, Cao y Maschietto, 2016; Roberts, Leung y Lin, 2013; Psycharis y Kalogeria, 2018). Según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), este tipo de dificultades son ocasionadas por el desconocimiento que los profesores tienen sobre el uso de las tecnologías (OCDE, 2018). Esto tiene como consecuencia el escaso uso didáctico de la tecnología en las prácticas de enseñanza (Carmona-Mesa y Villa Ochoa, 2017; Parada y Fiallo, 2012). Para superar esas dificultades es necesario que el futuro profesor (FP), durante su formación, adquiera competencias no sólo para usar las tecnologías digitales, sino también para integrarlas con propósitos didácticos y pedagógicos. Con base en esta necesidad, algunos educadores matemáticos han centrado su atención en explorar los requerimientos para que los FP de matemáticas adquieran habilidades para enseñar con tecnología (ver, por ejemplo, Bowers y Stephens, 2011; Llinares, 2018; Ruthven, 2009).

De acuerdo con Llinares (2018), un programa de formación es la base para una incorporación exitosa de las tecnologías en el aula. En este sentido, la capacitación tiene que permitir a los FP desarrollar habilidades para diseñar propuestas concretas y eficientes que involucren la integración de tecnologías para enseñar matemáticas (Drijvers *et al.*, 2016). Por ello, se sugiere que los formadores

---

<sup>1</sup> De ahora en adelante, a menos que sea especificado, el término “tecnología” hará referencia a las tecnologías digitales.

de futuros profesores [de ahora en adelante: profesor formador (PF)], además de mostrar cómo podría ser la enseñanza de las matemáticas con tecnologías, acompañen al FP durante sus prácticas de enseñanza con la intención de asesorarlos en la utilización de ellas. Es en este periodo de práctica en que el PF puede fortalecer las habilidades de enseñanza de los FP (Valbuena, Conde y Ortiz, 2018) y, a su vez, estudiar cómo ellos las implementan en las prácticas escolares. Según Jaworski (2008), este tipo de acompañamiento tiene consecuencias benéficas en el desempeño del FP dentro del aula.

Ahora bien, observar la enseñanza del FP no debe, únicamente, restringirse a lo que este hace en el salón de clase. El acompañamiento también puede consistir en incluir metodologías como la de la reflexión *a posteriori* de la propia práctica, pues esta permite al FP tomar conciencia de las acciones que puede mejorar durante sus clases (Chapman, 2009; Llinares y Krainer, 2006). El acompañamiento del FP de matemáticas en diversas etapas de su formación permite estudiar su aprendizaje. En otras palabras, observar el desempeño del FP al incorporar tecnologías en tres momentos distintos —antes, durante y después de sus prácticas de enseñanza— posibilita el análisis del fenómeno educativo *aprender a enseñar con tecnología*. Dicho fenómeno puede ser estudiado a partir de marcos teóricos que permitan detallar la forma como el FP (o, incluso, el profesor en servicio) integra tecnologías en su enseñanza con el propósito de mejorar el aprendizaje de sus estudiantes, tanto de conceptos matemáticos como del manejo de esas tecnologías. Assude, Grugeon, Laborde y Soury-Lavergne (2006) y Trouche, Gueudet, Pepin, Salinas-Hernández y Sacristán (2020a) han desarrollado, por separado, investigaciones en las que proponen marcos teóricos que tienen este propósito. Ambos marcos son adaptaciones de la aproximación teórica Génesis Instrumental, desarrollada por Vérillon y Rabardel (1995).

Aun cuando la Génesis Instrumental fue inicialmente propuesta para explicar los procesos de construcción de esquemas mentales en estudiantes que resuelven problemas matemáticos con el uso de tecnologías (Artigue, 2002), Goos *et al.* (2010) aseguran que es una de las tres aproximaciones más útiles para esclarecer el rol del profesor de matemáticas en un ambiente de enseñanza caracterizado por la presencia de tecnologías digitales. De hecho, en los marcos teóricos de Assude *et al.* (2006) y Trouche *et al.* (2020a) se parte de la consideración según la cual los profesores de matemáticas son los que guían las acciones que los estudiantes realizan al resolver un problema; así, los profesores, son también los que posibilitan que se produzca la Génesis Instrumental en sus estudiantes.

En cuanto al marco teórico de Assude. (2006), en él se propone el término “integración instrumental” para caracterizar los

distintos modos en los que profesores de secundaria usan la tecnología para que sus estudiantes reconozcan las propiedades de los cuerpos geométricos y, también, adquieran habilidades de uso de la tecnología. De esta forma, la integración instrumental mide el grado en que el profesor organiza su clase para propiciar la interrelación entre el manejo de la tecnología que debe tener el estudiante y el conocimiento matemático que éste debe adquirir con ese manejo.

Respecto del marco teórico desarrollado por Trouche *et al.* (2020a), llamado Enfoque Documental de lo Didáctico (EDD), se estudia la interacción que establecen profesores de matemáticas con los diferentes recursos (tecnologías digitales o no digitales) durante la planificación y ejercicio de su práctica de enseñanza. Más específicamente, a diferencia del marco de Assude *et al.* (2006), en el de Trouche *et al.* (2020a) la atención se centra, principalmente, en comprender la interacción de los profesores de matemáticas con los diversos recursos que ellos usan antes y durante su enseñanza. Trouche, Rocha, Gueudet y Pepin (2018) proponen el término “trabajo documental” para caracterizar esta interacción, la cual incluye seleccionar, modificar y crear nuevos recursos dentro y fuera de su clase.

Debido a que la presente investigación forma parte de un proyecto más amplio cuyos sujetos de estudio son FP de matemáticas, se considera que el marco teórico de Trouche *et al.* (2020a) es apropiado para responder la siguiente pregunta, guía del presente artículo: ¿cuál es el trabajo documental que genera el futuro profesor, David, al integrar la tecnología para enseñar la suma de ángulos internos de un polígono en un grupo de estudiantes de primer año de Educación Secundaria (estudiantes de 12-15 años)?

En la siguiente sección, marco conceptual, se explica con más detalle el término trabajo documental, cómo éste se relaciona con los conceptos principales del EDD y, a su vez, cómo es aplicado para responder la pregunta de investigación. Después del marco teórico, el artículo continúa con la sección de metodología. En ella se describe el contexto en el que se desarrolló este estudio y se detallan las cuatro fases en las que se tomaron los datos. Luego de esta sección se analiza lo hecho por David en el momento de preparar su práctica de enseñanza. El artículo termina con algunas conclusiones y reflexiones sobre el aprendizaje de los FP sobre la incorporación de la tecnología.

### Marco conceptual

En términos generales, el EDD (Trouche *et al.* 2020a) pretende obtener una visión holística de cómo el profesor de matemáticas hace uso de los distintos recursos para organizar su práctica de enseñanza. Esta visión holística se refiere, por un lado, a que el

término recurso no está únicamente restringido a los recursos tecnológicos y, por otro lado, a que la organización de la enseñanza incluye, también, los momentos previos a su implementación. Al aplicar este enfoque en el estudio de la forma de aprender a enseñar por parte de los FP de matemáticas, esta visión holística se presenta con relativa claridad. Debido a que, como parte de su formación, los FP deben impartir algunas clases de matemáticas (prácticas docentes), la preparación e implementación de una clase, así como la reflexión sobre lo que hicieron en ella, son los momentos adecuados para estudiar las diferentes interacciones que hacen ellos con los recursos que han decidido usar en cada uno de esos momentos.

Para precisar la forma de aplicar el EDD en la presente investigación, a continuación se exponen los términos *recursos*, *esquema de uso del recurso* y *documento*, los cuales ayudan a describir el trabajo documental de David.

Adler (2000) identifica que la palabra recurso (*resource*) se vincula a “volver nuevamente a la fuente o de manera diferente” (p. 207); su concepto se asocia a renovar, reabastecer. En el EDD, un recurso es definido como todo aquello que el profesor usa en y para su enseñanza. Trouche, Rocha, Gueudet y Pepin (2020b) retoman la definición de Salaün (2012), quien identifica que un recurso es algo generado con una intención, orientado a facilitar la comprensión o el aprendizaje. En este sentido, los recursos pueden ser o bien curriculares —aquellos que han sido diseñados exclusivamente para la enseñanza (por ejemplo: libros de texto, planes de estudio, *software* digital)— o bien no curriculares —aquellos que no han sido diseñados con un propósito educativo (por ejemplo: notas de periódicos, noticias) pero que pueden adaptarse para el trabajo docente; además, existen también recursos que pueden ser sociales (por ejemplo: conversaciones en foros) e, incluso, cognitivos (por ejemplo: marcos teóricos para ser implementados en la enseñanza) (Pepin y Gueudet, 2018). En forma breve, un recurso es: “la materia que alimenta el trabajo de los profesores” (Trouche *et al.*, 2020a, p. 4).

En el EDD se parte del supuesto según el cual un profesor, una vez que ha decidido qué recursos incorporará en sus clases, debe desarrollar alguna forma de utilizarlos (este orden: primero la planificación y, después, la implementación, se observa con mayor claridad en cursos de formación de profesores). De la utilización de los recursos surgen diferentes maneras de integrarlos en el aula. Estas maneras son denominadas *esquema de uso del recurso*. Vale aclarar que, al referirse a esquemas de uso de un recurso, se deben incluir aspectos asociados a la práctica de la enseñanza como: la forma de anticipar situaciones que pueden generarse en el aula, posibles modificaciones en la implementación del recurso frente a hechos no previstos, condiciones tanto espaciales como temporales en las que se va a implementar el recurso (por ejemplo:

tamaño del salón de clase, número de estudiantes, disponibilidad de equipo tecnológico). En el contexto de esta investigación, consideramos que el *esquema de uso de un recurso* es, también, la manera en que la tecnología es incorporada por parte de los futuros profesores.

Con respecto al término *documento*, debe entenderse en su más amplio sentido etimológico; es decir, es un medio (*-mento*) que sirve para hacer saber (*docēre*) algo. En este sentido, el documento generado por el profesor es todo aquello que produce antes, durante y después de desempeñar su rol docente en el aula. El *documento* no sólo se refiere a escritos (por ejemplo: notas de clase, libros de texto o planes de estudio), sino, incluso, a reflexiones que el profesor haga con sus estudiantes, producto de experiencias laborales o personales. En palabras de Gueudet y Trouche (2009), “el documento es mucho más que una lista de ejercicios [matemáticos]: está saturado de la experiencia de los profesores” (p. 205). Así, puede inferirse que la experiencia personal de cada profesor es también un documento. En términos generales, en el EDD se concibe al *documento* como aquello de lo que un profesor se sirve para lograr un determinado objetivo de aprendizaje. En el caso de FP, aun cuando a ellos se les proporcionan documentos específicos con los que deberán implementar sus prácticas docentes (por ejemplo: planes de estudio, libros de texto), la experiencia personal que ellos hayan adquirido antes y durante su formación es un documento que puede ser útil en el momento de realizar sus prácticas docentes.

En el EDD, el documento relaciona a los *recursos* y a los *esquemas* de uso de un recurso mediante la siguiente expresión: *Recurso + Esquema de uso = Documento* (Trouche *et al.*, 2020a). Esta expresión no debe entenderse como una ecuación matemática. Lo que ella significa es que un documento es el resultado que se obtiene al asociar el recurso con los esquemas que genera el profesor sobre ese recurso. Como los documentos son generados en la medida en que el profesor usa los recursos y desarrolla esquemas de uso de esos recursos, la expresión anterior debe entenderse como un proceso de generación de documentos. Es precisamente en este proceso de generación de documentos en el que es posible observar la interacción docente-recurso. Dicho de otra manera, es en este proceso en el que sucede el trabajo documental del profesor.

Para esta investigación, la expresión *Recurso + Esquema de uso = Documento* es aplicada para describir, específicamente, la interacción de David con los recursos que él usa en una clase de geometría. Con esto en mente, consideramos que el trabajo de Hughes (2005), quien distinguió tres formas en que un profesor usa tecnología en el aula, es útil para identificar los esquemas de uso de David cuando este emplea algún tipo de tecnología en su rol docente. Debe tomarse en cuenta que, aun cuando la propuesta

de Hughes se refiere a un profesor en servicio, su aplicación a un FP no altera su validez. A continuación, se describe de forma más detallada cómo se incorpora la propuesta de Hughes en la expresión *Recurso + Esquema de uso = Documento*.

Según Hughes (2005), las tres maneras de usar la tecnología en el aula son: *reemplazo*, *amplificador* y *transformador* (ver *figura 1*). En la manera de uso, identificada como *reemplazo*, el FP no transforma sus prácticas pedagógicas y la tecnología es utilizada para sustituir otros recursos ya existentes, pero sin modificar contenidos de enseñanza ni objetivos de aprendizaje. Ahora bien, si el FP utiliza la tecnología para realizar actividades con mayor eficiencia o para mejorar la rapidez y la precisión de resolución de tareas, la tecnología es usada como *amplificador*. Finalmente, si la incorporación de la tecnología logra modificar el modo de acceso al aprendizaje del estudiante, su uso es *transformador*. De acuerdo con Hughes, es en el uso transformador en el que se modifica el rol docente, las acciones que generan los estudiantes, la forma en que se apropian del conocimiento y se transforma el abordaje en el que se hace del tema.

**Figura 1.** Descripción de los indicadores de Hughes (2005) sobre los diferentes usos que se les da a los recursos digitales.

Esquema de uso reemplazo	Esquema de uso amplificador	Esquema de uso transformador
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El recurso ofrece un sustituto de lo que puede hacerse con lápiz y papel sin modificar las tareas ni el rol del profesor.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El recurso tecnológico proporciona mayor eficacia, precisión y rapidez en la resolución de actividades y problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El recurso tecnológico ayuda a transformar el rol del estudiante, lo hace protagonista al aproximarse a los conceptos matemáticos. El estudiante se involucra en el aprendizaje activo.</li> </ul>

Fuente: Creación propia.

De esta forma, dado que el desempeño del FP es estudiado durante cuatro fases de la elaboración de una secuencia didáctica (ver sección de Metodología), es posible identificar el esquema de uso que tiene un FP respecto a la manera de implementar la tecnología en sus clases. Esto significa que, desde el punto de vista teórico, un FP puede tener distintos esquemas de uso durante las distintas fases en las que sucede su práctica de enseñanza. Por ejemplo, en la escritura de la planificación didáctica, puede tener un *esquema de uso amplificador* de la tecnología y, sin embargo, en el momento de implementar la secuencia, tener un esquema

de uso reemplazo. En el caso de esta investigación, las tres formas de emplear la tecnología conforman los esquemas de uso de David; además, estas formas son, a su vez, los indicadores que nos ayudarán a describir su trabajo documental.

### Metodología y contexto de la investigación

La metodología usada en esta investigación es cualitativa y se centra en un estudio de caso. De acuerdo con Stake (1998), esta metodología permite atender la particularidad y la complejidad de las acciones de los individuos. Asimismo, se seleccionó la metodología reflexiva de investigación utilizada en el EDD, reportada en el trabajo de Gueudet y Trouche (2009). De acuerdo con estos autores, el estudio de los documentos generados por un profesor (en nuestro caso, un FP) debe hacerse por medio del seguimiento dentro y fuera del aula. Este último seguimiento (fuera del aula) se refiere a lo que hace el profesor antes y después de implementar sus actividades planificadas. Esto le permite al investigador centrar la atención sobre el proceso reflexivo del propio profesor y confrontar su punto de vista entre el diseño y la implementación del recurso tecnológico.

El caso analizado en este artículo corresponde al trabajo documental de David, un FP del programa permanente de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas en Uruguay. En el momento de realizar este estudio, David cursaba Didáctica III, un curso del último año de ese programa permanente. Este curso se entrelaza en forma continua con las situaciones de aula que vivencia todo FP durante su enseñanza; consta de una parte teórica y una práctica. La parte teórica se orienta a conocer aportes de investigaciones de la matemática educativa y a vincularlas a la enseñanza. La parte práctica del curso, llamada práctica docente, consiste en realizar, durante todo el año, el rol de profesor en un grupo de Educación Secundaria. El trabajo de todo FP se realiza bajo la supervisión del PF, titular del curso Didáctica III. La supervisión dura todo el año escolar. En específico, en al menos cinco clases, el PF observa el desempeño del FP cuando éste desempeña el rol de profesor en su grupo de práctica. Durante el curso Didáctica III, el PF realiza orientaciones al FP para diseñar secuencias didácticas, así como para incorporar diferentes tecnologías durante su rol de profesor. Además de ser supervisados por el PF, los FP deben visitar a sus compañeros en alguna de las sesiones de enseñanza de sus grupos de práctica para realizar la observación de aula y analizar la clase. La observación de aula realizada por cada FP tiene que generar aportes a la clase de su compañero. Esto implica sugerir mejoras e identificar aspectos positivos de la clase observada.

Para el caso específico del curso de Didáctica III en el que se encontraba David, la primera autora de este artículo fungió como PF y como investigadora. Parte de la evaluación semestral final de este curso consistió en que la PF les pidió a los FP que desarrollaran tres secuencias didácticas. Cada una de ellas debía cumplir las siguientes condiciones: 1) ser presentada y comentada con todo el grupo de FP y con la PF; 2) ser mejorada a partir de las sugerencias recibidas durante la presentación; 3) ser implementada en el grupo de Educación Media que cada uno de los FP tenía a su cargo. En el caso de David, él tenía a su cargo un grupo de 1er. año de Educación Secundaria (estudiantes de 12-13 años) y 4) ser reflexionada con la PF una vez que fuera implementada.

Además de la elaboración de las secuencias didácticas, los FP debían elaborar un escrito llamado Planificación. Éste debe contener la secuencia didáctica elegida por el FP, su resolución e implementación, el diseño de lo que se va a escribir en los pizarrones, las posibles dificultades que pudieran surgir en los estudiantes, las estrategias de enseñanza a utilizar y, finalmente una especificación del recurso utilizado. Este instrumento puede ser lúdico, tecnológico o, incluso, uno no diseñado para la enseñanza de las matemáticas, pero que se pudiera adaptar para este propósito. Además, en la Planificación, los FP debían explicitar los motivos por los que sugerían los ejercicios incluidos en sus secuencias didácticas.

Desde el punto de vista metodológico, las cuatro condiciones que debían cumplir las secuencias didácticas, mencionadas en los párrafos precedentes, permitieron observar el trabajo documental de David en las siguientes cuatro fases: 1) Previo al diseño de la secuencia didáctica, en intercambio con otros FP, 2) La Planificación de la secuencia didáctica, 3) La implementación de la secuencia didáctica y 4) La reflexión, luego de la implementación del recurso tecnológico.

La experiencia personal de David le permitió tener conocimientos sobre el uso del *software* GeoGebra. Como se verá en la siguiente sección, estos conocimientos le fueron de mucha utilidad durante la primera fase del desarrollo de su secuencia. En este artículo sólo se reporta una de las tres planificaciones de David. El tema elegido por él en esta secuencia fue: “Suma de los ángulos interiores de un polígono”. En la siguiente sección se describen los documentos de esta secuencia, generados por David en cada una de las cuatro fases mencionadas en el párrafo precedente. Todas las participaciones de David durante las cuatro etapas fueron grabadas en audio y video. Así, la recopilación de datos provino de dos fuentes principales: los escritos de David y las grabaciones de sus participaciones.

## Resultados y análisis del trabajo documental de David

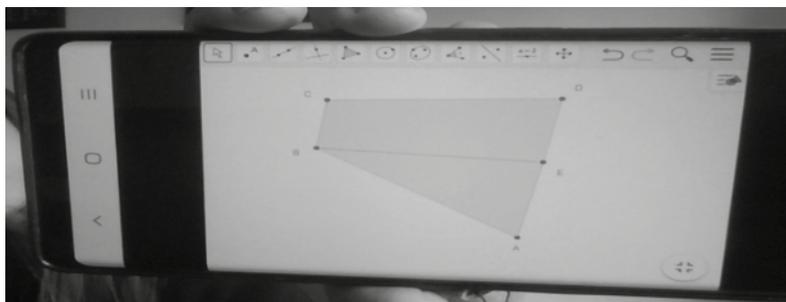
### *Fase 1: Previo al diseño de la secuencia didáctica, en intercambio con otros FP*

Como parte de la clase en la que se mencionan las características de la evaluación final semestral, la PF hizo hincapié en que, para incluir la tecnología digital en las clases de matemática, es necesario ayudar a los estudiantes por medio del uso de Applets (aplicaciones específicas incrustadas en una página *web*). La PF elaboró preguntas como las siguientes: ¿cómo diseñar una Planificación de clase que incluya el uso de un Applet para enseñar un contenido matemático?, ¿qué aspectos hay que considerar para utilizarlo?, ¿de qué manera los estudiantes accederán a los Applets?, ¿cuál podría ser el enunciado más adecuado de la tarea?, ¿qué dispositivo o artefacto se utilizará?, ¿cómo se hará el registro de lo que los estudiantes preguntan y de lo que ellos aprenden, junto con lo que ellos hacen con el recurso digital? Todas estas preguntas le aportan al FP insumos que lo llevan a averiguar cuál es la disponibilidad de recursos que ofrece la institución educativa donde él desarrolla su práctica docente.

En el caso de David, su experiencia en el manejo de tecnologías digitales le permitió proponer a la PF y a sus compañeros un Applet de GeoGebra (de ahora en adelante Applet) con el que sus estudiantes podrían estudiar la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.

En esta fase, previa al diseño de la secuencia didáctica, David tuvo la iniciativa de verificar si la institución donde hacía sus prácticas disponía de computadoras portátiles para ser prestadas a cada estudiante. Al saber que sus estudiantes no iban a poder acceder al salón de informática y que no iban a tener su propia computadora para comenzar a utilizar el Applet, decidió que usaran sus propios teléfonos inteligentes (celulares) como equipos de cómputo. En el día previo a la implementación de su secuencia didáctica, David confesó a sus compañeros de clase y a la propia PF lo siguiente: “frente a la no disponibilidad de computadoras ni de la sala de computación, decidí utilizar el celular como artefacto y que mis estudiantes descargaran GeoGebra en cada uno de sus dispositivos [móviles]” (véase *figura 2*).

**Figura 2.** Estudiante muestra en su teléfono inteligente el Applet y las herramientas de GeoGebra sugeridas por David.



Aun cuando el recurso digital propuesto por David es el Applet y este puede asociarse como el resultado de su experiencia personal en el manejo del *software* de geometría dinámica GeoGebra (en el sentido de que su conocimiento sobre el uso de GeoGebra le permitió desarrollar el Applet con relativa facilidad), el hecho de diseñarlo con el fin de utilizarlo para enseñar un contenido matemático implicó que tuviera que pensar *a priori* su implementación y esquema de uso. Esto le llevó a crear una Ficha de trabajo del estudiante (de ahora en adelante, Ficha) para que este pudiera hacer uso del Applet.

Vale decir que, si bien David pudo haber propuesto usar una computadora y, por medio de ella, mostrar que la suma de los ángulos internos de cualquier polígono tiene una relación con el número de lados del polígono, su decisión de usar los teléfonos móviles como herramientas de cómputo fue una estrategia didáctica que estuvo basada en su intención de permitir que cada estudiante “se diera cuenta” de esa relación. Con esta intención se infiere que, previo al diseño de la secuencia, David pretendía utilizar la tecnología con el esquema de uso transformador. En la siguiente sección se analiza si su forma de proponer el uso del Applet podría contribuir al cumplimiento de este objetivo.

### *Fase 2: La Planificación de la secuencia didáctica*

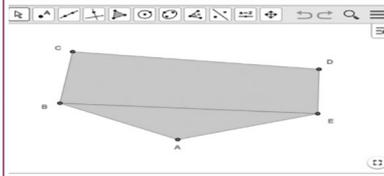
En esta segunda fase se describe el trabajo documental de David en la elaboración de su Planificación antes de la implementación de su secuencia didáctica en su grupo de práctica docente. Para ello, centramos la atención en los diseños de su Ficha y su Applet. La Ficha incluye orientaciones para acceder al Applet (ver *figura 3*: Indicaciones de acceso al Applet, foto izquierda) y actividades que deben realizar los estudiantes (ver *figura 3*: Actividades para realizar en el Applet, fotos: izquierda y derecha) una vez que accedan al Applet. El Applet es una figura geométrica conformada por un cuadrilátero y un triángulo (ver ejemplo en *figura 3*, foto derecha).

Durante la discusión con el grupo de FP sobre cómo fue diseñado el Applet, David aseguró que:

el triángulo se construyó a propósito con un vértice hacia abajo, ya que en clases anteriores se identificó y generó la discusión sobre la orientación de la figura para definir si era o no un triángulo; algunos alumnos no identificaban un triángulo cuando no estaba apoyado en una de sus bases.

Aun cuando el objetivo de la secuencia didáctica fue el de obtener la suma de los ángulos internos de un polígono, en su respuesta David deja entrever que el diseño de su Applet tenía también la intención de contribuir a cambiar algunas falsas concepciones que pudieran tener sus estudiantes.

**Figura 3.** Ficha de trabajo del estudiante. La ficha consta de indicaciones de acceso al Applet y de actividades para realizar. El Applet puede consultarse en <https://www.geogebra.org/m/kyhy5gqp>.

Indicaciones de acceso al Applet	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Abre la <b>Graficadora</b> de GeoGebra </li> <li>2) En el menú de <b>opciones</b> selecciona <b>abrir</b>.</li> <li>3) En el <b>buscador</b>, escribe entre comillas "Actividad L64" y selecciona la 2.</li> <li>4) Haz clic en la imagen que aparece con ese nombre.</li> <li>5) Se mostrará una imagen como la siguiente:</li> </ol>	
Actividades para realizar en el Applet	
<p>Observando la figura, responde en tu cuaderno de clase:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) ¿Cuántas figuras observas? Nómbralas e indica la cantidad de lados y ángulos interiores que tiene cada una.</li> <li>b) Selecciona ahora la herramienta de medición <b>Ángulo</b> y mide los ángulos interiores de la figura (ABE). Escribe la medida de los ángulos:  <math>\widehat{ABE} = \underline{\hspace{2cm}}</math>  <math>\widehat{BEA} = \underline{\hspace{2cm}}</math>  <math>\widehat{EAB} = \underline{\hspace{2cm}}</math>            ¿Cuánto suman los 3 ángulos?</li> </ol>	<div style="text-align: center;">  </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>c) Mueve el punto A y repite el procedimiento que realizaste en el punto b). ¿Puedes sacar alguna conclusión?</li> <li>d) Con la herramienta de medición <b>Ángulo</b>, mide ahora los ángulos interiores de (BCDE).  <math>\widehat{BCD} = \underline{\hspace{2cm}}</math>  <math>\widehat{CDE} = \underline{\hspace{2cm}}</math>  <math>\widehat{DEB} = \underline{\hspace{2cm}}</math>  <math>\widehat{EBC} = \underline{\hspace{2cm}}</math>            ¿Puedes establecer alguna condición entre estas medidas? Mueve los vértices C, D y observa las medidas de los ángulos anteriores. ¿Puedes llegar a alguna conclusión?</li> <li>e) Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores del (ABCDE)? ¿Cómo lo explicarías?</li> <li>f) ¿Podrías deducir la suma de los ángulos interiores de una figura de 6 lados? ¿Y de 7 lados?</li> </ol>

Fuente: Trabajo de David.

El Applet y la Ficha pueden considerarse como dos recursos curriculares que David elabora para su secuencia didáctica. El primero es un recurso digital; el segundo, un recurso no digital. Ahora bien, si las seis actividades para realizar en el Applet de la Ficha [partes de la a) a la f)] son conceptualizadas como documentos (en el sentido de que, por medio de ellas, David intenta lograr el objetivo de aprendizaje de la secuencia), puede decirse que la Ficha es un recurso no digital que se conforma de seis documentos. Cada uno de estos documentos puede ser analizado

a partir de sus recursos (el Applet y la Ficha) y del esquema de uso de este Applet. En la *tabla 1* se resume el análisis de los seis documentos. En ella se puede observar que, en el diseño de su Ficha, David propuso diferentes esquemas de uso del Applet.

**Tabla 1.** Resumen de los diferentes usos del Applet, según el análisis de la Ficha diseñada por David.

Actividad del estudiante	Esquema de uso del Applet propuesto por David	Trabajo Documental
<b>Parte a)</b> ¿Cuántas figuras observas? Nómbralas e indica la cantidad de lados y ángulos interiores que tiene cada una	<i>Esquema de uso reemplazo</i> de GeoGebra. El Applet es utilizado para sustituir recursos tradicionales (ejemplo: una imagen o una construcción realizada con útiles de geometría).	Applet + Ficha + <i>Esquema de uso reemplazo</i> de GeoGebra
<b>Parte b)</b> Selecciona ahora la herramienta de medición Ángulo y mide los ángulos interiores de la figura (ABE)	<i>Esquema de uso amplificador</i> de GeoGebra. Pretende hacer uso de una herramienta que ofrece mayor precisión (por ejemplo, medir la amplitud de los ángulos) que los útiles de geometría.	Applet + Ficha + <i>Esquema de uso amplificador</i> de GeoGebra
<b>Parte c):</b> Mueve el punto A y repite el procedimiento que realizaste en el punto b). ¿Puedes sacar alguna conclusión? <b>Parte d):</b> Con la herramienta de medición Ángulo, mide ahora los ángulos interiores de (BCDE) ¿Puedes establecer alguna condición entre estas medidas? Mueve los vértices C, D y observa las medidas de los ángulos anteriores. ¿Puedes llegar a alguna conclusión? <b>Parte e):</b> Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores del (ABCDE)? ¿Cómo lo explicarías? <b>Parte f):</b> ¿Podrías deducir la suma de los ángulos interiores de una figura de 6 lados? ¿Y de 7 lados?	<i>Esquema de uso transformador</i> de GeoGebra. Utiliza la funcionalidad dinámica del <i>software</i> GeoGebra para inferir o descubrir algo nuevo.	Applet + Ficha + <i>Esquema de uso transformador</i> de GeoGebra

La forma de redactar la parte a) indica que David propone utilizar GeoGebra como reemplazo de lo que pudiera hacerse en el pizarrón. Las acciones que se piden realizar al estudiante en esta

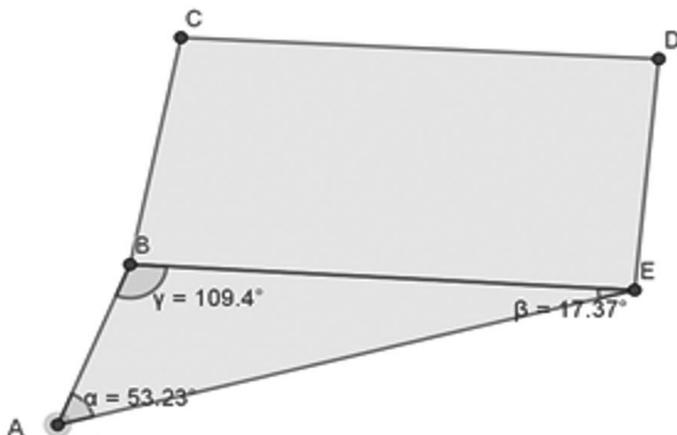
parte (nombrar las figuras e indicar número de ángulos interiores y lados según lo que observe en la figura del Applet) podrían realizarse sin el uso del Applet. De esta forma, el recurso digital es utilizado para reemplazar recursos ya existentes. En esta parte de la actividad, el enunciado y el rol docente no han tenido ninguna transformación con respecto a una enseñanza en la que no se hubieran incluido recursos digitales. En otras palabras, la tecnología digital se utiliza de la misma manera en que se usarían los recursos tradicionales; en este sentido, el rol del profesor dentro del aula no cambia. Según el EDD, podría decirse que el documento que se genera en esta parte de la Ficha se expresa de la siguiente manera: *Applet + Ficha + Esquema de uso reemplazo de GeoGebra = Parte a)*. A continuación, se analiza la argumentación que David presenta de la parte b) de su Ficha.

La parte b) brinda un espacio para que el estudiante coloque las medidas de los ángulos interiores del polígono, obtenidas a partir de usar una herramienta del Applet. Para que estas medidas fueran precisas, David consideró algunas características de la configuración del *software* vinculadas al redondeo de valores numéricos. Al escribir su Planificación indicó que: “se configura GeoGebra para obtener la amplitud de los ángulos en grados hasta centésimos. Así, al realizar la suma de los ángulos observarán [sus estudiantes] que les da 180°”. La justificación de esta configuración que él hizo a su PF y al resto de los FP de su grupo fue la siguiente: “se utilizará la herramienta *Ángulo* de la barra de herramientas de GeoGebra, para medir la amplitud de los ángulos interiores del triángulo; el *software* proporcionará mayor exactitud de dichas medidas en comparación a si hubieran utilizado útiles de geometría”. Esta afirmación de David deja en evidencia la intencionalidad de un esquema de uso amplificador del recurso, pues la medición de los ángulos con instrumentos geométricos (por ejemplo: transportador, compás) podría no ser tan precisa como con la herramienta digital. *El documento* que se genera en la parte b) se puede expresar como *Applet + Ficha + Esquema de uso amplificador de GeoGebra = Parte b)*.

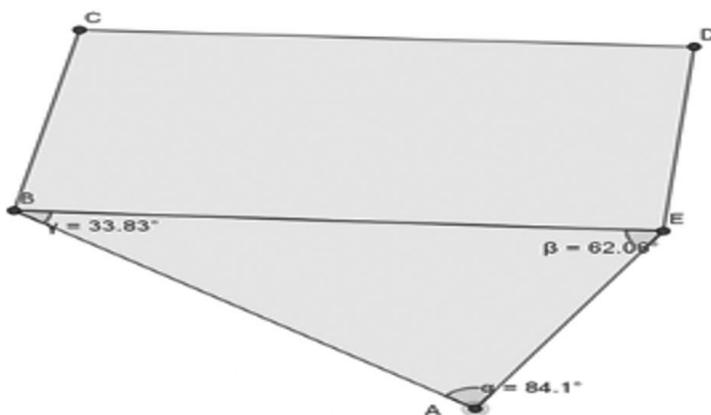
Ahora bien, el trabajo documental generado por David en su Ficha también incluye otras formas de usar la tecnología. Al preguntarle en qué consiste la parte c) de la Ficha, David responde: “se les pedirá [a los estudiantes] que muevan el punto A de modo que obtendrán valores distintos de las medidas de los ángulos y podrán llegar a una conclusión”. Esta intención se ve reflejada en la propia redacción de la parte c): “Mueve el punto A y repite el procedimiento que realizaste en la parte b. ¿Puedes sacar alguna conclusión al respecto?” Con esta instrucción, David incluye la característica dinámica del *software*; es decir, sin necesidad de realizar nuevas construcciones y, al modificar la posición de uno de los vértices, es posible obtener otros nuevos polígonos. En las *figuras* 4, 5 y 6 puede observarse cómo un estudiante podría

modificar la posición del punto “A” en el plano. Además de mover este punto, la parte c) solicita que se midan, con la herramienta “Ángulo”, los ángulos del triángulo ABE y que se sumen en cada nuevo triángulo obtenido. Esto con la intención de que los estudiantes pudieran obtener una primera conjetura entre la suma de los ángulos interiores de un polígono y los lados de éste.

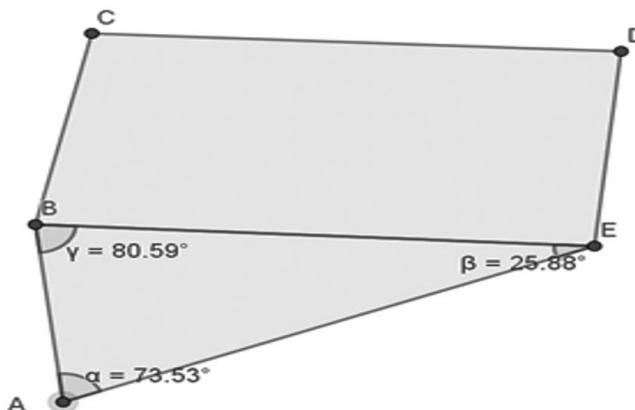
**Figura 4.** Una primera posible posición del vértice A.



**Figura 5.** Al arrastrar el vértice A, puede observarse una segunda posible posición de él.



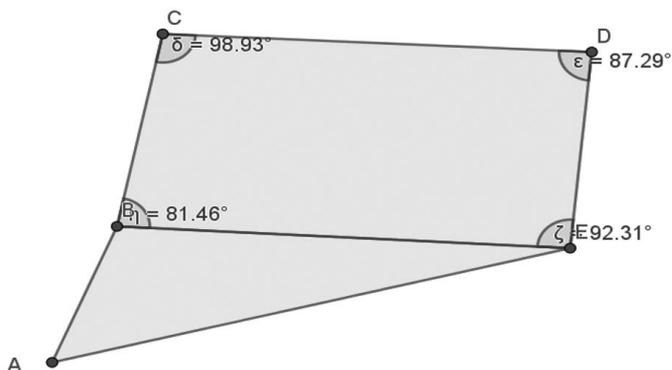
**Figura 6.** Al arrastrar nuevamente el vértice A, puede obtenerse una tercera posible posición de él.



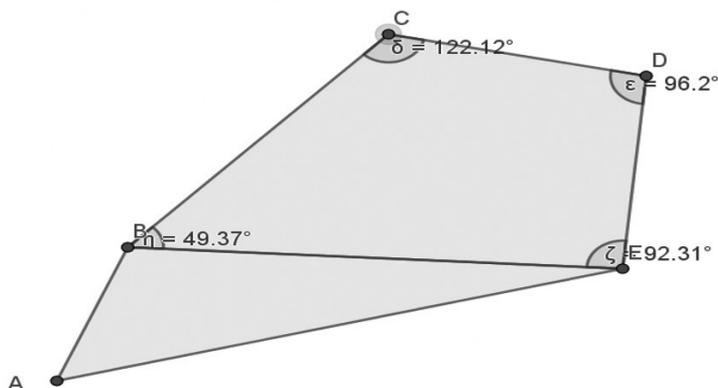
La redacción de la parte c) pone de manifiesto la intencionalidad de David de que sus estudiantes pusieran más atención en la relación de la suma de los ángulos que en la técnica de medir ángulos, tal y como sucedería si usaran herramientas no digitales de geometría. Así, sus estudiantes estarían en la posibilidad de abordar un nuevo conocimiento matemático. Tomando en cuenta únicamente la parte c) de la Ficha, el trabajo documental generado por David se constituye por: *Applet + Ficha + Esquema de uso transformador de GeoGebra = Parte c)*.

La parte d) de la Ficha es muy similar a las partes b) y c), pues pide medir las amplitudes de los ángulos del cuadrilátero CDEB, mover los vértices C y D y medir los ángulos interiores de cada cuadrilátero obtenido. En las *figuras 7, 8 y 9* se muestra una posible secuencia de posiciones del cuadrilátero CDBE al mover los vértices C y D.

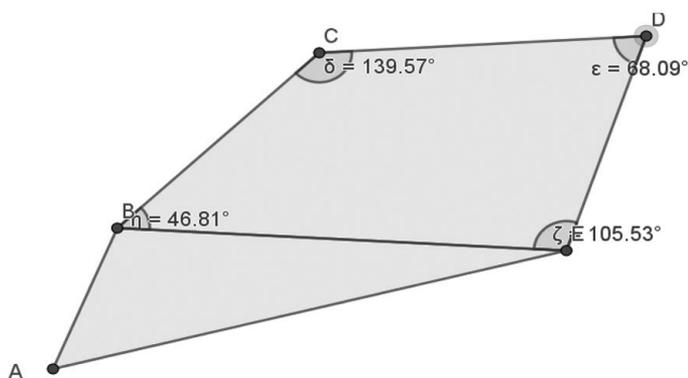
**Figura 7.** Una primera posible posición de los vértices C y D.



**Figura 8.** Al arrastrar los vértices C y D, una segunda posible posición de ellos puede obtenerse.



**Figura 9.** Al arrastrar nuevamente los vértices C y D, una tercera posible posición de ellos puede obtenerse.



Con esta parte de la Ficha, David pretendía que sus estudiantes llegaran a una nueva conjetura respecto de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero. En sus propias palabras, David comentó que en la parte d) “se les pedirá [a los estudiantes] que muevan los vértices C y D de modo que también puedan observar que la suma se mantiene constante en  $360^\circ$ ”. De esta forma, el esquema de uso del recurso proyectado por David en esta parte de la Ficha es *transformador*. Es decir, David prevé que el rol docente será de guía y que el alumno tendrá el rol principal en el proceso de aprender. Aún más, junto con las partes b) y c), David tenía la intención de que sus estudiantes vincularan la suma de ángulos de un triángulo con la suma de ángulos de un cuadrilátero. Esto para lograr que ellos establecieran una relación

entre la suma de los ángulos interiores y los lados del polígono. En su Planificación David escribió: “Les pediré que piensen cuántos triángulos necesitan para formar la figura y relacionen con lo que estuvimos trabajando [partes a), b) y c) de la Ficha]”. El trabajo documental de David, en esta parte de su Ficha, se puede expresar como: *Applet + Ficha + Esquema de uso transformador de GeoGebra = Parte d)*.

En la parte e) de la Ficha se propone que el estudiante formule conclusiones y proponga cuánto suman los ángulos de un pentágono a partir de la figura del Applet (ver *tabla 1*). La intencionalidad de David era la de permitir que sus estudiantes encontraran una relación entre el número de lados del polígono y la suma de amplitudes de sus ángulos internos. Así, la redacción de esta parte tiene el propósito de provocar una transformación en el aprendizaje de los estudiantes; es decir, al seguir las instrucciones de la parte e), se pretende que el estudiante adquiera un nuevo conocimiento, pues a partir de las experiencias de las partes anteriores, David pensaba que el Applet permitiría, a sus alumnos, elaborar conclusiones por sí solos. Así, el trabajo documental generado en la parte e) se caracteriza de la siguiente manera: *Applet + Ficha + Esquema de uso transformador de GeoGebra = Parte e)*.

La intencionalidad de la última parte de la Ficha, parte f), fue la de permitir que los estudiantes de David escribieran una fórmula para calcular la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un polígono de “n” lados (ver *tabla 1*). El hecho de concluir las actividades con una expresión general y el modo en el que David solicita interactuar con el Applet deja entrever que el esquema de uso de estos recursos es transformador, pues deseaba que sus propios estudiantes encontraran un patrón que relacionara la suma de ángulos internos de un polígono con los lados de ese polígono. Así, el trabajo documental en esta parte de la Ficha puede representarse con la siguiente expresión: *Applet + Ficha + Esquema de uso transformador de GeoGebra = Parte f)*.

El análisis en conjunto de cada una de las partes de la Ficha permite dar cuenta cómo David deseaba visualizar su clase. En términos generales, podemos decir que el esquema que él pretendía implementar con el Applet era *transformador*; sin embargo, la forma de redactar cada una de las partes de la Ficha indica que sus estudiantes difícilmente lograrían transformar su conocimiento geométrico sobre los polígonos y la suma de sus ángulos internos. Para que David pudiera experimentar la inclusión de la tecnología en su clase y se pudiera dar cuenta de si su secuencia podía lograr que sus estudiantes observaran la relación matemática entre la suma de ángulos internos y los lados de un polígono cualquiera, era necesario poner en práctica la Ficha y el Applet. Este proceso de diseñar e implementar una secuencia ayuda a configurar el trabajo documental de David a medida que éste experimenta su rol docente al enseñar lo que planificó en la Ficha.

En la siguiente fase se analizan los documentos generados en el aula al implementar la secuencia didáctica.

### *Fase 3: La implementación de la secuencia didáctica*

Desde el punto de vista del análisis de los datos generados en la implementación de la secuencia didáctica, en esta fase se busca reportar el trabajo documental desarrollado por David; es decir, se pretende conocer cuáles fueron los esquemas de uso que se observaron en la clase.

La visita de la PF a la clase en la que David implementó el Applet duró 45 minutos. Al comienzo de la clase, los alumnos tuvieron algunas imprecisiones en la manipulación del Applet, pues algunos de ellos movieron sin intención algunos de los vértices del polígono del Applet. Luego de que los estudiantes adquirieran mayor habilidad para manejar el Applet, continuaron con la lectura de las partes de la Ficha.

En la fase 2 se identificó que el esquema de uso del Applet en la parte a) de la Ficha era de reemplazo. Después de observar el desempeño de los estudiantes de David, identificamos que ellos no hicieron uso del *software* para responder las preguntas de la parte a). Así, en esta primera parte de la Ficha, el trabajo documental de David durante su clase fue *Applet + Ficha + Esquema de uso reemplazo de GeoGebra = Parte a)*. En otras palabras, el trabajo documental de David en la parte a) de su Ficha fue el mismo tanto en la Planificación como en la implementación de su secuencia.

El modo como la tecnología fue usada por David al implementar en su clase la parte b) de la Ficha nos indicó que su esquema de uso fue amplificador, como se había identificado en la fase 2. En efecto, al pretender medir los ángulos del triángulo con la herramienta “Ángulo”, se observó que el Applet permitió a los estudiantes mejorar la prolijidad de la construcción y la precisión de las medidas de los ángulos. En este sentido, el trabajo documental de David durante la implementación de esta parte coincidió con el trabajo documental identificado en la fase 2.

En las partes c) y d) de las actividades propuestas en la Ficha, los estudiantes, por medio del Applet, pudieron utilizar la característica dinámica del *software* para obtener nuevos triángulos y cuadriláteros al cambiar la posición de uno de sus vértices. De hecho, en la clase se observó que los estudiantes resolvieron estas partes con rapidez, pues ellos ya habían adquirido habilidad en el manejo del Applet. Esto les permitió obtener, en cada caso y de forma inmediata, las amplitudes y las sumas de los ángulos interiores de cada triángulo y cada cuadrilátero. Incluso, en un comentario posterior a la clase respecto al desempeño de sus estudiantes en estas partes de la Ficha, David reconoció que ellos: “pudieron experimentar, al mover los vértices de una figura, [...] que la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es de 180 grados”.

Al percatarse que el movimiento de uno de los vértices del triángulo y del movimiento de dos de los vértices del cuadrilátero no alteraba la suma de sus ángulos internos, los estudiantes pudieron conceptualizar a los triángulos de una nueva forma. Ahora, ellos podrían identificar a un triángulo en términos de la suma interna de sus ángulos y no únicamente por el conteo de sus lados. Así, una vez más, podemos decir que el trabajo documental de David durante la implementación de las partes c) y d) coincide con su trabajo documental de la planificación de su secuencia.

Las partes e) y f) de las actividades implicaban un grado de abstracción mayor que las otras partes de la Ficha (ver *tabla 1*). Para resolver estas partes, los estudiantes debían concluir lo hecho por ellos en las partes anteriores de la Ficha y, además, explicar una característica general de los cuadriláteros en términos de la suma de sus ángulos interiores. Recuérdese que el objetivo de aprendizaje propuesto por David era que sus estudiantes obtuvieran una fórmula o relación para calcular la suma de ángulos internos de un polígono de “n” lados. Durante la observación de la clase por parte de la PF, no se evidenció que los estudiantes hayan logrado, por sí solos, llegar a esta explicación. De hecho, fue el propio David quien orientó los razonamientos de sus estudiantes para que enunciaran esa relación. Así, el trabajo documental de David en las partes e) y f) no coincide con su trabajo documental durante la Planificación; el uso del Applet fue amplificador y no transformador. En otras palabras, a diferencia de la fase 2, en esta fase 3, el trabajo documental de las partes e) y f) se puede expresar así: *Applet + Ficha + Esquema de uso amplificador de GeoGebra = Partes e) y f)*.

A pesar de esta diferencia, la primera elaboración de la Ficha y la incorporación del Applet en la clase de David sirvieron para que él se diera cuenta de que se requerían mejoras en la redacción de algunos de los enunciados de la secuencia didáctica a fin de lograr, en otro momento, un acercamiento diferente de los estudiantes hacia el conocimiento de la relación entre los lados de un polígono y la suma de la medida de sus ángulos internos. A continuación, se muestra la forma como la PF y David reflexionaron sobre la implementación del Applet y sobre la elaboración de la Ficha.

#### *Fase 4: La reflexión luego de la implementación del recurso tecnológico*

Al culminar la clase, la PF y David conversaron y reflexionaron sobre lo que había sucedido en ella. La retroalimentación generada entre ambos permitió identificar aspectos que pudieran mejorarse en las primeras fases de la elaboración de la secuencia didáctica y, a su vez, pudieran servir para futuras implementaciones. David reconoció que la primera fase fue de gran valor y fue muy enriquecedora para continuar con la mejora del diseño de la tarea y de la Planificación. En la conversación, David mencionó que: “el intercambio con mis compañeros permitió elaborar una

mejorada respecto de la primera idea original [propuesta inicial de David no mencionada en este artículo] que atendió sus recomendaciones”. David identificó que fue fundamental indagar la disponibilidad de recursos tecnológicos de la institución educativa donde hizo sus prácticas, pues así pudo decidir con anticipación qué artefacto utilizar y cómo preparar a sus estudiantes para usar el Applet. Aseguró que la decisión de descargar GeoGebra en los teléfonos celulares de sus alumnos le permitió optimizar el tiempo de clase. También valoró haber diseñado en forma minuciosa el escrito de la Planificación, pues pudo anticipar situaciones de aula y desenvolverse con mayor tranquilidad. Un aspecto que David observó fue que: “el aprendizaje de la matemática se logra, no por el recurso en sí mismo, sino por el trabajo del profesor al utilizarlo como medio para alcanzar el aprendizaje”. Este tipo de reflexiones le sirvieron para generar conocimientos y mejorar su rol de profesor.

En cuanto a las reflexiones sobre su rol docente, David identificó que es necesario detenerse a pensar en cómo se desenvolverá el profesor en el aula al incluir recursos tecnológicos; a su vez, se centró en la mejora, tanto de la implementación de los recursos digitales como en su propio desempeño durante la práctica docente. En particular, comentó: “el rol del docente en la Planificación de la actividad [secuencia didáctica], en la interacción de los diversos recursos y en el manejo de los registros [de representación matemática] que le quedarán al estudiante es fundamental para que la clase sea exitosa”. Sin embargo, la PF sugirió que: “sería necesario incluir en la Planificación, con mayor detalle, cómo será el rol docente, para así lograr que los estudiantes puedan realizar conjeturas”. Si bien David consideró que el diseño de la Planificación ayuda a organizar la clase, se dio cuenta de que es necesario realizar algunos ajustes que podrían, en el futuro, ayudar a desarrollar la clase en mejores condiciones.

Respecto de la Ficha, David identificó que su diseño dirigía las acciones de sus estudiantes y que, con pequeños ajustes, les daría mayor posibilidad de explorar y conjeturar. Mencionó que: “el recurso, cuando se utiliza para investigar y dejar que los estudiantes sean los partícipes de esta experimentación, tiene más riqueza para el aprendizaje que al utilizarlo como una herramienta para ejercitar habilidades rutinarias”.

David concluyó que: “es necesario realizar alguna modificación a la Ficha propuesta, pues direccionaba el quehacer del estudiante. Esto generó que algunos estudiantes perdieran la motivación inicial y se transformara en una [secuencia didáctica] rutinaria”. Después de esta conclusión, surgió la idea de incluir en la Ficha una tabla con partes incompletas para que el alumno pudiera completar el proceso de cálculo de la suma de ángulos interiores de un polígono vinculados al número mínimo de triángulos que lo conforman. Asimismo, David identificó aspectos del

Applet que tendría que mejorar para que el polígono diseñado en él no se modifique al realizar la parte a) de la Ficha. Al respecto, comentó: “la creación del Applet de la primera actividad [parte a)] no tenía los puntos fijos, con lo cual generó que algunos estudiantes tuvieran distintas mediciones al moverseles la figura [polígono]”, tal vez, si los puntos B y E fueran fijos esto no hubiera sucedido”. La PF coincidió que, si bien identificó estas dificultades, consideró que David solucionó sin inconveniente este imprevisto.

Estas reflexiones surgieron como consecuencia de las diferencias entre los esquemas de uso del recurso digital, previstos en la Planificación en las partes e) y f), y los logrados en su implementación. En efecto, David previó generar en su enseñanza un *documento* conformado por el recurso y el *esquema de uso transformador*; sin embargo, el *esquema de uso* logrado en las partes e) y f) fue *amplificador*. Las modificaciones sugeridas en esta Fase 4 podrían ayudar a lograr desarrollar el *esquema de uso transformador*. Otras ideas que surgieron en este intercambio fueron incluir, en el Applet, tablas dinámicas para realizar la suma de los ángulos interiores y personalizar la barra de herramientas. Esto implicaría habilitar sólo los íconos que se debían utilizar en el Applet, lo cual permitiría mejorar la atención de los estudiantes. Otra modificación sugerida durante la conversación entre la PF y David fue configurar en el Applet la amplitud del ángulo entre 0 y 180° a fin de evitar que el *software* mida ángulos externos del polígono al utilizar la funcionalidad “Amplitud de un ángulo”.

A partir de la observación de aula, tanto David como la PF consideraron que se realizó un uso adecuado y organizado del pizarrón, e identificaron que la escritura de la Planificación fue un insumo orientador que ayudó a David y a sus estudiantes a tener un registro de lo que se fue aprendiendo en su clase. La PF reconoció que: “la realización del diseño de los pizarrones en la Planificación facilitó a David tomar rápidamente decisiones sobre qué escribir en la clase”. A su vez, la Ficha permitió integrar las respuestas de las partes de la secuencia e incluir comentarios sobre las posibles conjeturas de los estudiantes. De esta forma, la Ficha sirvió de guía y permitió realizar un registro ordenado y más rápido del pizarrón. Vale mencionar que las participaciones y dudas de los estudiantes fueron registradas en el pizarrón; esta forma de registro fue, de hecho, un tema discutido, previo al desarrollo de la clase. Así, la propia reflexión lleva a David a darse cuenta de la importancia de los documentos (en el sentido de Trouche *et al.*, 2020a) que son necesarios crear o perfeccionar para desarrollar la práctica docente del profesor. Asimismo, David identificó que la inclusión de la tecnología digital tuvo como ventaja que los “estudiantes que no participan habitualmente, al utilizar GeoGebra, participaron y generaron aportes [a la clase]”. Del mismo modo, valoró que se desarrollaron actitudes de cooperación entre estudiantes durante el uso del Applet.

## Conclusiones y reflexiones finales

El objetivo de esta investigación fue describir el trabajo documental que realizó David, un FP de matemáticas, al incluir un Applet de GeoGebra para enseñar la suma de ángulos internos de un polígono, en un grupo de 1er. año de Educación Secundaria. En este artículo se utilizó el EDD como marco teórico para analizar los documentos que genera un FP al incluir un recurso tecnológico para enseñar matemática. En la descripción del caso de estudio, se refleja que la integración de la tecnología funciona más allá de ser un sustituto de herramientas tradicionales como el lápiz y el papel. Lo que se pudo observar al describir el trabajo documental de David en las cuatro fases descritas fue que él vivenció un proceso de aproximación a diferentes usos de GeoGebra. Primero, lo usó como un sustituto de útiles de geometría; segundo, para que sus estudiantes lograran experimentar la característica dinámica del *software*; tercero, para desarrollar conjeturas en relación con la suma de los ángulos interiores de un triángulo y de polígonos de 4, 5 y 6 lados.

El análisis de los datos permite concluir que el trabajo documental de David dependió de las fases en las que él se encontraba durante la preparación de la secuencia didáctica. En otras palabras, la interacción entre David y el recurso tecnológico digital no siempre coincidió con el uso que efectivamente se logró en el aula. *El esquema de uso transformador* de la tecnología implica mayor complejidad para el docente, pues, aunque pueda anticiparse su uso durante la Planificación de una secuencia didáctica, en la práctica este uso, a veces, no se logra concretar. Otro aspecto importante que surge del análisis es la importancia de la reflexión antes de la implementación del recurso, como también después de incorporarlo para enseñar matemáticas. Esta reflexión no sólo permite mejorar los conocimientos que David adquiere en el uso de los recursos, sino también genera aprendizaje sobre nuevas implementaciones que él pudiera realizar en clases futuras.

Consideramos que el aprendizaje de los diferentes usos de recursos para la enseñanza debe vivenciarse desde la formación inicial del profesorado de matemáticas. Pero es necesario tomar en cuenta que los recursos tecnológicos, por sí solos, no son la panacea para las preocupaciones didácticas del profesor o para superar las dificultades que puede vivenciar un estudiante al aprender matemáticas. Por el contrario, es necesario que el FP pueda complementar el uso de recursos tecnológicos con recursos manipulativos no digitales. En vista de la complejidad que implica el aprendizaje del uso de la tecnología en la clase de matemáticas, consideramos fundamental que la enseñanza del uso de los recursos digitales comience, como lo sugiere Llinares y Krainer (2006), en la formación inicial docente y, de esta manera, propiciar una opinión más favorable sobre el uso de estos recursos. Asimismo,

sugerimos que el FP transite por diferentes usos del recurso tecnológico. Esto para tener un mejor panorama sobre los distintos roles de los estudiantes y de él mismo. Esta enseñanza no puede culminar en un enunciado de intenciones, sino que tiene que concretarse en prácticas concretas. Un posible camino en la formación de profesores es, primero, elaborar simulaciones de enseñanza con cambio de roles, en las que un FP desempeña el rol del docente y sus compañeros de estudio (es decir, otros FP) simulen el rol de estudiantes de una clase; segundo, llevar esas experiencias a la propia aula.

Este estudio de caso deja entrever que integrar tecnologías puede ser un acto complejo para los FP. Estos necesitan de una enseñanza previa del uso de la tecnología en el diseño de secuencias didácticas, con la finalidad de que su implementación en el aula logre transformar el conocimiento matemático de los estudiantes. A su vez, del análisis de los datos se puede inferir que el uso de un recurso tecnológico requiere de un proceso de aprendizaje; es mediante este proceso que los FP pueden incrementar los conocimientos sobre cómo utilizar los recursos y cómo implementar u orientar su propio rol y el del estudiante. Este proceso puede caracterizarse a partir de las decisiones que toma el FP sobre las diferentes modalidades de usar la tecnología en las fases de elaboración e implementación del recurso tecnológico. Estas decisiones influyen sobre los esquemas de uso que se desarrollan sobre el recurso; esto quiere decir que la planificación le sirve como guía para su labor docente. Lo que hace en su labor docente no debe restringirse a lo que la Planificación le indica; por el contrario, su labor docente debe ser flexible. Esto le permite adaptarse en forma natural a lo que ocurre en la clase junto con sus estudiantes, atendiendo las dudas, intervenciones y los procesos de aprendizaje que se desarrollan en el aula. Es esta propia experiencia la que va moldeando los esquemas de uso de los recursos que se utilizan y, a la vez, el rol docente del FP mejora. En el caso de David, su trabajo documental se gestó a partir de elaborar el Applet, se fue desarrollando en el intercambio que sostuvo con la PF y los demás FP sobre la pertinencia del Applet, se robusteció durante la implementación de la secuencia en su clase y, finalmente se fortaleció en la conversación que él sostuvo con la PF, al final de su clase.

Consideramos que cada vez que se produce el ciclo: diseño, escritura de la secuencia didáctica, implementación de ésta en el aula, reflexión sobre la práctica, se genera un nuevo trabajo documental que permite al FP desenvolverse con mayor experiencia y conocimientos sobre los esquemas de uso de los recursos digitales que implemente en el aula.

Futuras investigaciones son necesarias para indagar cómo el trabajo documental de los FP se ve afectado por la incorporación de recursos curriculares distintos del Applet y de la Ficha. Por ejemplo, puede ser de interés al campo de la Educación Matemática observar

cómo los FP generan documentos a partir del empleo de recursos no curriculares como las notas periodísticas. La utilización de este recurso, junto con los esquemas de uso que se hagan de él, genera necesariamente documentos que pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas.

Se declara que la obra que se presenta es original, no está en proceso de evaluación en ninguna otra publicación, así también que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

## Referencias

- Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Bogotá: UD.
- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205–224. doi: 10.1023/A:1009903206236
- Artigue, M. (2015). Tecnologías de la información y de la comunicación y aprendizaje basado en la investigación: ¿Qué sinergias? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, (pp. 17-27). Academia de Artillería de Segovia.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080
- Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C. y Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? En L. Son, Sinclair, N., Lagrange, J. y Hoyles, C. (Eds.). *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 317-325). Hanoi: Institute of Technology.
- Bowers, J. y Stephens, B. (2011). Using technology to explore mathematical relationships: a framework for orienting mathematics courses for prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(4), 285-304. doi: 10.1007/s10857-011-9168-x
- Carmona, J. y Villa-Ochoa, J. (2017) Necesidades de formación en futuros profesores para el uso de tecnologías. Resultados de un estudio documental. *Revista Paradigma*, 38(1), 169-185.
- Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. En R. Evan y D. Ball (Eds.). *The professional education and development of teachers of mathematics*. The 15th ICMI Study. Boston: Springer, 121-126. doi: 10.1007/978-0-387-09601-8\_14
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M., Cao, Y. y Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary Mathematics Education*. Springer.
- Goos, M., Soury-Lavergne, S., Assude, T., Brown, J., Kong, C. M., Glover, D., Grugeon, B., Laborde, C., Lavicza, Z., Miller, D. y Sinclair, M. (2010). Teachers and teaching: theoretical perspectives and issues concerning classroom implementation. En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain* (pp. 311–328). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Guedet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199–218. doi: 10.1007/s10649-008-9159-8

- Hollebrands, K. y Okumuş, S. (2018). Secondary mathematics teachers' instrumental integration in technology-rich geometry classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 82-94. doi: 10.1016/j.jmathb.2017.10.003
- Hughes, J. (2005). The role of teacher knowledge and learning experiences in forming technology integrated pedagogy. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13(2), 277-302. Recuperado el 11 de enero de 2022, de: <https://www.learntechlib.org/primary/p/26105/>
- Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.). *Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol.4: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 1-13). Rotterdam: Sense Publishers.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Brill Sense.
- Linares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 1-3. doi: 10.35763/aiem.v0i13.237
- Linares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education (PME)*. Rotterdam. The Netherlands: Sense Publishers.
- OCDE (2018). *Teaching and learning international survey (TALIS) 2018 conceptual framework*. doi: 10.1787/19939019
- Parada, S. y Fiallo, J. (2012). Una mirada con profesores de Santander (Colombia) sobre el uso de tecnologías en clase de matemática. *Memoria Congreso Iberoamericano de Aprendizaje Mediado por Tecnología*, 757-766.
- Pepin, B. y Gueudet, G. (2018). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. En Lerman, S. (ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.
- Psycharis, G. y Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(6), 631-660.
- Roberts, D., Leung, A. y Lin, B. (2013). From the slate to the web: Technology in the mathematics curriculum. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. Leung (Eds.) *Third international handbook of mathematics education* (pp. 525-547). Berlin: Springer.
- Ruthven, K. (2009). Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics. *Education and Didactique*, 3(1), 131-159. doi: 10.4000/educationdidactique.434
- Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos, M., Friedlander, A. y Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning — and learning trajectories— of mathematical concepts. En C. Hoyle y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology*. Rethinking the terrain (pp. 179-226). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Salaün, J. (2012). *Vu, lu, su. Les architectes de l'information face à l'oligopole du Web*. París: La Découverte.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Trouche, L., Gueudet, G. y Pepin, B. (2018). Documentational approach to didactics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. N.Y.: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-77487-9\_100011-1

- Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., Salinas-Hernández, U. y Sacristán, A. (2020a). El enfoque documental de lo didáctico. DAD-Multilingual. Recuperado de: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02557744v2>
- Trouche, L.; Rocha, K.; Gueudet, G. y Pepin, B. (2020b). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: the case of Anna's documentation work. *ZDM Mathematics Education*. doi: 10.1007/s11858-020-01164-8
- Valbuena, S., Conde, R. y Ortiz, J. (2018). La investigación en educación matemática y práctica pedagógica, perspectiva de licenciados en Matemáticas en formación. *Educación y Humanismo*, 20(34), 201-2015. doi: 10.17081/eduhum.20.34.2593
- Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101. doi: 10.1007/BF03172796