

Comprensión del producto cruz: Un estudio de caso en la formación de profesores

Understanding the Cross Product: A Case Study in Teacher Training

Marcela Parraguez González marcela.parraguez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Rosario Guerra Martínez rguerra01@ucn.cl
Universidad Católica del Norte, Chile

Francisco Javier Lezama Andalón jlezamaipn@gmail.com
Instituto Politécnico Nacional, México

Recibido: 20/12/2020 Aceptado: 22/11/2022

Palabras clave: Articuladores, comprensión, modelo, modos de pensamiento, producto cruz.

Keywords: Articulators, understanding, model, modes of thought, cross product.

Resumen

Haciendo uso de la teoría Modos de Pensamiento de Sierpinska, se presenta un modelo de comprensión del producto cruz a través de tres modos de pensarlo: (1) como el vector normal a otros dos vectores que generan un plano, (2) como una fórmula que permite calcularlo y (3) a través de una propiedad que lo caracteriza. La finalidad de presentar estos tres modos de pensar el producto cruz es mostrar evidencias de la comprensión profunda de este concepto. Con base en la metodología de estudio de caso se consideraron nueve profesores en formación inicial de dos instituciones de educación superior de Chile, que fueron tratados como dos casos de estudio, con la finalidad de mostrar cómo los profesores en formación inicial de Matemática se sitúan en esos modos de pensar el producto cruz para dar respuesta a dos actividades que se les presentaron. Los resultados evidenciaron que los profesores se sitúan en uno u otro modo de pensar el producto cruz para responder las actividades y la interacción entre los modos propuestos mostró tres elementos matemáticos que actúan como articuladores entre ellos.

Abstract

Using Sierpinska's Modes of Thought theory, a cross-product understanding model is presented through three modes of thinking: (1) as the normal vector to two other vectors that generate a



plane, (2) as a formula that allows to calculate it and (3) through a property that characterizes it. The purpose of presenting these three ways of thinking the cross product is to show evidence of the deep understanding of this concept. Based on the case study methodology, nine teachers in initial training from two higher education institutions in Chile were considered, which were treated as two case studies, to show how the teachers in the initial formation of Mathematics are situated in these ways of thinking the cross product, to respond to two activities that were presented to them. The results showed that the teachers are placed in one or another way of thinking the cross product to respond to the activities and the interaction between the proposed modes showed three mathematical elements that act as articulators between them.

Introducción

La Geometría Vectorial es un tópico que forma parte de los programas de estudio de Álgebra Lineal de variadas carreras universitarias, en particular de Pedagogía en Matemáticas. Investigaciones en el área de la Didáctica de la Matemática han reportado dificultades con la enseñanza y aprendizaje de sus conceptos, por ejemplo, Dorier (1997) declara que, para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas, sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos (Dorier, 1997, p. 208) que, en muchos casos, los aprendices los manejan mecánicamente sin comprenderlos. Sumado a lo anterior, Dorier y Sierpinska (2001) señalan que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas. Nuestro objeto de estudio –el producto cruz (PCx)– no queda ajeno a lo que nos indican esas investigaciones y es en este escenario que nos proponemos indagar en cómo los estudiantes en formación para profesores de Matemática interpretan dicho producto, y nos preguntamos: ¿cómo los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas le otorgan significado e interpretan al PCx?

Se realizó una revisión en busca de antecedentes sobre la enseñanza y aprendizaje del PCx. Debido a la importancia de los vectores en el aprendizaje de la Física se llevó a cabo una revisión de artículos desde esta área científica, poniendo de relieve algunas dificultades que existen en el aprendizaje del concepto PCx (Parraguez y Guerra, 2020). Ambas investigaciones coinciden en que los estudiantes tienen un mayor dominio del cálculo de las componentes del vector que resulta del PCx, pero tienen serias dificultades en interpretarlo geoméricamente.

Es justamente la dirección que toma esta investigación: indagar en, si las diferentes formas de interpretar y comprender el PCx están articuladas cuando un estudiante lo usa para dar respuesta a un conjunto de actividades porque el uso puede ser un medio de aprendizaje y construcción de significado de las distintas interpretaciones del PCx.

2. Antecedentes

Martínez y Benoit (2008) presentan un planteamiento histórico-epistemológico del PCx, que va desde el surgimiento de los cuaterniones hasta el análisis vectorial, con la finalidad de favorecer la percepción geométrica de él. Complementario a ello, en el artículo de Barniol y Zavala (2014), los investigadores inician la investigación con una hipótesis en la cual se pone de manifiesto que los estudiantes calculan el producto vectorial, pero en general no logran una clara significación en la Física o la interpretación geométrica de éste. Es este aspecto lo que este artículo pretende poner de relieve, situados en las diferentes formas de usar el PCx. Barniol y Zavala (2014) presentan una investigación basada en un test de selección múltiple que busca evaluar el entendimiento de estudiantes (585 estudiantes que terminan sus cursos de Física en una universidad privada mexicana) sobre conceptos de naturaleza vectorial a través de tres aspectos: (1) La definición operacional del concepto, (2) La diferencia entre conceptos que se relacionan y (3) El uso del concepto de manera precisa. Los autores muestran en los ítems que se relacionan con el PCx que el error más frecuente es elegir un vector perpendicular a los dos vectores, pero con una dirección opuesta. La comprobación en estos estudios de la discrepancia interpretativa entre la operacionalidad del PCx con su geometría es la fuente de nuestro interés de investigación.

En otra investigación, Deprez *et al.* (2019) investigan la influencia del contexto en la comprensión de los estudiantes del PCx. Utilizando pruebas de opción múltiple, preguntan por la dirección del PCx en diferentes entornos geométricos, dos en el contexto de la física y el otro estrictamente matemático; su estudio muestra que a los estudiantes les cuesta mucho aplicar una técnica correcta para determinar la dirección de PCx de manera adecuada y consistente.

2.1. Problemática de investigación

Los antecedentes, presentados al alero de la Física, nos muestran que la descoordinación en la comprensión del PCx se ubica entre lo operacional y lo interpretativo, es decir, su cálculo, en ausencia de su significado geométrico y propiedades estructurales, mismas que le confieren su carácter de objeto único en la geometría vectorial. El hecho de concebir el PCx como

algoritmo conduce a que el estudiante lo calcule de manera mecánica, complicando una abstracción adecuada del objeto, y va en contraposición con el marco interpretativo del álgebra lineal, que trasciende a sólo la práctica y dominio de un conjunto de procedimientos de cálculo (Parraguez, 2012, p. 14), dificultando la construcción de significados.

Por ejemplo, si bien es aceptado por todos en el sistema de los números reales que $6 \times 5 = 5 \times 6$, que estructuralmente constituye la ley conmutativa que es intrínseca a la multiplicación, en el PCx se demanda en el aprendiz resignificar su concepción de producto en este nuevo contexto del álgebra vectorial donde esta multiplicación de objetos diferentes a los que contienen los sistemas numéricos \mathbb{R} , \mathbb{Q} y \mathbb{Z} que usualmente estamos más acostumbrados a multiplicar, arrastra consigo la idea de que la multiplicación es conmutativa, y es difícil aceptar que en otros ámbitos (espacio vectorial de dimensión 3) $\vec{a} \times \vec{b}$ no es igual a $\vec{b} \times \vec{a}$ sino que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ cuando $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Esta última propiedad de “anticonmutatividad” (o no-conmutatividad) se conoce con el nombre de Simetría alternada en la Matemática y es de carácter geométrico, la que es válida en el PCx. Pero no sólo esta propiedad del PCx causa confusión en los estudiantes sino también otra propiedad que se relaciona con el PCx igual a cero vector. Cuando el PCx de dos vectores es igual a cero vector no necesariamente uno de sus multiplicandos es el vector nulo, por ejemplo, $(1, -2, 3) \times (-2, 4, -6) = (0, 0, 0)$ porque el vector $(-2, 4, -6)$ es múltiplo escalar de $(1, -2, 3)$, es decir, $(-2, 4, -6) = -2(1, -2, 3)$.

Es en esta problemática del PCx, situada en el contexto de estudiantes para profesores de Matemática, que se plantean las preguntas que guían la investigación: a) ¿Cuáles son los significados que otorgan los estudiantes al PCx? y b) ¿Logran los estudiantes articular los diferentes significados del PCx?

2.2. Objetivo de investigación

Describir y fundamentar los distintos significados del objeto matemático de PCx, identificando los elementos de la matemática que permiten la articulación entre los distintos modos de interpretarlo.

2.3. Aproximación epistemológica

Hamilton, uno de los fundadores de la matemática moderna, en 1843 creó los *cuaterniones*. Él trabajó sobre mecánica y comenzó una búsqueda sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano a una comprensión geométrica en tres dimensiones. Para ello redirige su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional. Al trabajar con los vectores unitarios en \mathbb{R}^3 , $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$, Hamilton observa que la propiedad conmutativa para el producto de estos tres

vectores no se cumple porque $ij = -ji$. La explicación de esta multiplicación en el espacio pone en evidencia que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así como construye los “cuaterniones de Hamilton”, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones algebraicas y geométricas entre ellos, en particular la multiplicación de cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del cuaternión, dio origen a lo que se conoce como el PCx (Martínez y Benoit, 2008).

Desde la aproximación epistemológica, el interés de este artículo es situarse en tres modos de pensar el PCx: Geométrico, Algebraico y Estructural para propiciar la comprensión profunda del mismo a través de la interacción de tres formas de pensarlo.

3. El producto cruz

El concepto de PCx está presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Pedagogía en Matemáticas, Ingenierías, Licenciatura en Ciencias o en Economía. Nuestro propósito es analizar el PCx desde un enfoque pragmático y teórico, mostrando diferentes aproximaciones para su comprensión.

Generalmente el programa de Álgebra Lineal, para un curso de primer año para formación de profesores de Matemática, contiene un apartado de Geometría Vectorial, en el cual se estudia el PCx. La definición de PCx –que es exclusivamente para \mathbb{R}^3 – que presentamos a continuación se puede encontrar en diferentes textos de estudio de álgebra lineal (Benítez, 2015; Lay, 2012; Poole, 2011, entre otros).

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 , su PCx $\vec{a} \times \vec{b}$ (en este orden) se define como el vector: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$, el cual se puede presentar mediante un seudodeterminante.

Los determinantes permiten expresar la fórmula que define al PCx de forma más compacta, como se muestra a continuación.

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1i + a_2j + a_3k$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1i + b_2j + b_3k$ dos vectores en \mathbb{R}^3 expresados a través de los vectores unitarios i, j y k de \mathbb{R}^3 , el PCx $\vec{a} \times \vec{b}$ se puede presentar a través del seudodeterminante:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(1,0,0) - (a_3b_1 - a_1b_3)(0,1,0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(0,0,1) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Así, el seudodeterminante nos proporciona una forma de obtener algebraicamente el vector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ donde } i, j \text{ y } k \text{ son los vectores unitarios de } \mathbb{R}^3.$$

Existen numerosas investigaciones (Asiala *et al.*, 1996; Parraguez, 2013; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; Parraguez y Oktaç, 2012; Rodríguez, Parraguez y Trigueros, 2018; Weller *et al.*, 2002) que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender el concepto de vector, pero no así de geometría vectorial y menos aún si se restringe al estudio del PCx desde una postura cognitiva.

El problema central con el PCx es que al estudiante le demanda trabajar con conceptos abstractos –vectores, norma de un vector, ángulo entre vectores, propiedades algebraicas de las operaciones con vectores–, pero la práctica escolar promueve el trabajar con procedimientos mecánicos –dimensión calculatoria por sobre la semántica–, limitando así la comprensión sobre los conceptos involucrados.

3.1. Interpretaciones del producto cruz

La propuesta de esta investigación radica en mostrar significados del concepto de PCx, reconociendo en ellos componentes de origen geométrico, algebraico y estructural, identificando en cada uno de esos componentes diferentes aspectos del concepto de PCx.

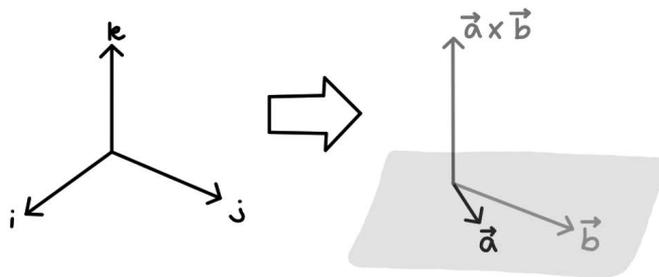
Mostramos dos propiedades, P1 y P2, que resultan de su definición o construcción, dependiendo de la naturaleza de sus multiplicandos.

Propiedad P1. Para vectores \vec{a} y \vec{b} en \mathbb{R}^3 : $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ y \vec{b} son linealmente dependientes (colineales).

Propiedad P2. Si los vectores \vec{a} y \vec{b} en \mathbb{R}^3 no son linealmente dependientes (no colineales), entonces $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector definido de la siguiente forma:

- I. Su dirección es perpendicular al plano que generan \vec{a} y \vec{b} .
- II. Su sentido depende de las posiciones relativas de los vectores unitarios coordenados i , j y k . Si éstos se colocan como se ve en la figura 1 se dice que forman un sistema coordenado orientado en sentido anti-horario, por lo que la dirección queda determinada por la regla de la mano derecha (figura 1). Esta regla se describe en la sección 3.1.1.

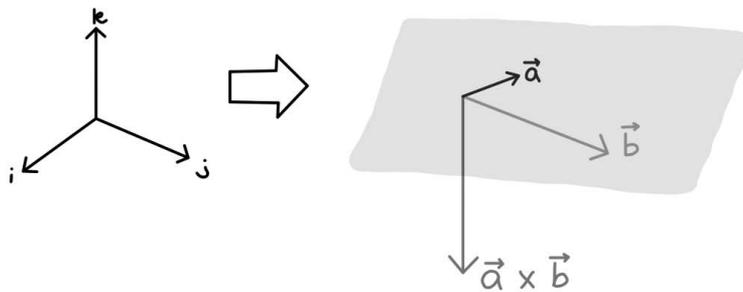
• **Figura 1.** Sistema coordinado orientado en sentido anti-horario



Fuente: Apostol (1984)

Y si el sistema coordinado es orientado en sentido horario la dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$ es opuesta a la que se muestra en la figura 1, y queda determinada por la regla de la mano izquierda (figura 2).

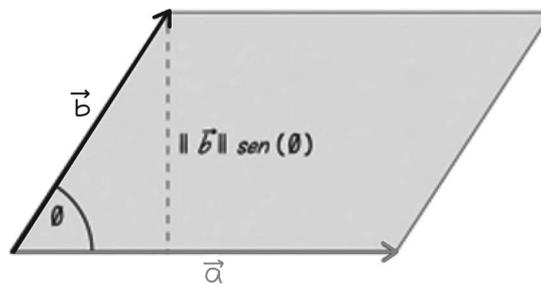
• **Figura 2.** Sistema coordinado orientado en sentido horario



Fuente: Apostol (1984)

III. Su módulo es igual a $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\phi)$, donde ϕ es el menor ángulo entre \vec{a} y \vec{b} (figura 3), conocido como Identidad de Lagrange.

• **Figura 3.** La longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b}



Fuente: Apostol (1984)

3.1.1. Mnemotecnias

Para calcular el PCx se utilizan diversas reglas mnemotécnicas. A continuación se describen dos de ellas.

(I) Regla de la mano derecha: Permite determinar la dirección y sentido del PCx, considerando la mano derecha con tres dedos, o bien, la mano derecha con toda la palma de la mano.

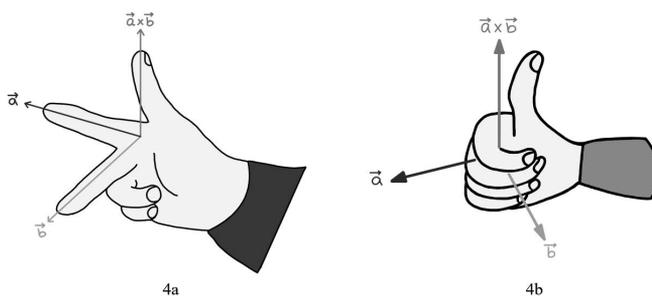
La primera versión de la regla de la mano derecha se realiza con tres dedos, como se muestra en la figura 4a, siguiendo tres pasos y ese orden:

- ◊ Coloca el dedo índice de la mano derecha en la dirección del primer vector del PCx.
- ◊ Coloca el dedo medio de la mano derecha en la dirección del segundo vector del PCx.
- ◊ La posición resultante del dedo pulgar señala la dirección y el sentido del PCx.

La segunda versión de la regla de la mano derecha se realiza con toda la palma de la mano, como se muestra en la figura 4b, siguiendo tres pasos y ese orden.

- ◊ Pon tu mano derecha apuntando con los dedos en la misma dirección que el primer vector del PCx.
- ◊ Cierra tu mano derecha moviendo tus dedos hacia el segundo vector del PCx. Se debe cerrar la mano por el lado en el que el ángulo (o distancia) entre los vectores es menor.
- ◊ La posición resultante del dedo pulgar determina el sentido y la dirección del PCx.

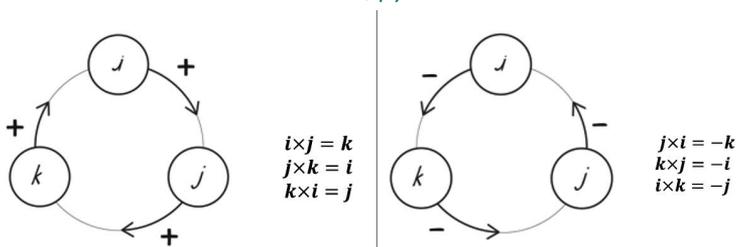
• **Figura 4.** Regla de la mano derecha para determinar en cuál de las dos direcciones posibles apunta $\vec{a} \times \vec{b}$



Fuente: Marsden y Tromba (1991)

(II) Diagrama cíclico: Permite determinar los productos vectoriales de los vectores a través de los vectores bases $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $k = (0,0,1)$, de acuerdo con la tabla 1.

• **Tabla 1.** Diagramas cíclicos para el producto cruz de los vectores unitarios i, j y k de \mathbb{R}^3



Fuente: Elaboración propia

De la tabla 1 se tiene que: $i \times j = k = -(j \times i)$, $j \times k = i = -(k \times j)$ y $k \times i = j = -(i \times k)$.

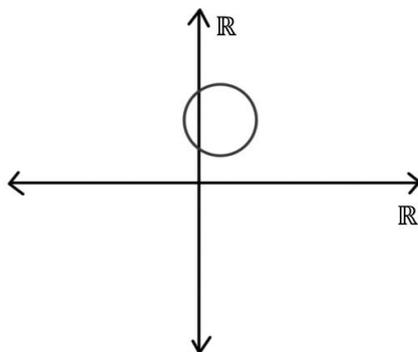
4. La teoría de los Modos de Pensamiento de Sierpinska

Los Modos de Pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska (2000), cuya finalidad es interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos que se relacionan con el álgebra lineal. Según esta teoría, la comprensión de objetos matemáticos requiere de un pensamiento práctico, como también de un pensamiento teórico, pero articulados. Para hacer explícito el pensar teórico del álgebra lineal, Sierpinska propone tres modos de pensar el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos posiciones dogmáticas opuestas del álgebra lineal, una que rechaza los números dentro de la geometría y la otra que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. En general, Sierpinska, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico del álgebra lineal, propone tres modos de pensamiento para este fragmento de la matemática, que constituyen formas de interpretar y entender los objetos matemáticos, y cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, con la finalidad de tener acceso a diferentes facetas del mismo objeto matemático.

Sierpinska (2000) identifica el modo Sintético-Geométrico (SG) con el pensar práctico del Álgebra Lineal, y los modos Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE) con el pensar teórico de este fragmento de la matemática.

En modo SG: Los objetos matemáticos se presentan mediante una representación geométrica, como una figura, un conjunto de puntos, entre otros. Por ejemplo, en el modo SG la circunferencia en el plano \mathbb{R}^2 es presentada a través de la figura 5.

• **Figura 5.** SG-Circunferencia en el plano



Fuente: Elaboración propia

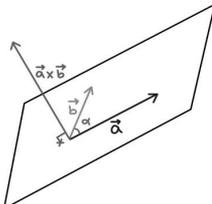
En modo AA: Los objetos matemáticos son presentados a través de relaciones numéricas o simbólicas. Por ejemplo, en este modo AA la circunferencia en \mathbb{R}^2 es presentada a través de la siguiente expresión, que se conoce como ecuación de la circunferencia de centro (b, k) y radio R : $(x - b)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

En modo AE: Los objetos son presentados a través de las propiedades de los objetos o a través de axiomas que los caracterizan. Por ejemplo, la circunferencia en \mathbb{R}^2 de centro O y radio R se representa como el lugar geométrico $LG = \{P \in \mathbb{R}^2: d(P, O) = R\}$.

4.1. Los Modos de Pensar el concepto de PCx

Al concepto de PCx, con base en lo que se viene relatando en los apartados anteriores, se le pueden asignar diferentes significados, sin embargo, según los elementos de la teoría de Sierpinska, hay tres formas de ver y entender el PCx, es decir, tres modos de pensar el PCx, como se muestra en la tabla 2.

• **Tabla 2.** Modos de pensar el PCx

Modo de pensar SG-PCx	Modo de pensar AA-PCx	Modo de pensar AE-PCx
	<p>Sean $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en \mathbb{R}^3.</p> $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$	<p>Sean a y b dos vectores en \mathbb{R}^3</p> $\ a \times b\ = \ a\ \ b\ \text{sen}(\theta),$ <p>donde θ es el (menor) ángulo entre a y b.</p> <p>(Identidad de Lagrange).</p>

Fuente: Elaboración propia

Hemos considerado a la Identidad de Lagrange como el modo de pensar AE-PCx porque es una identidad que caracteriza al PCx en cuanto a su fundamentación como teoría, y es propia de este producto. La finalidad de presentar estos tres modos de

pensar radica en la búsqueda de los elementos matemáticos que nos permiten el ir y venir (transitar) entre un modo de pensar y otro, y que en el contexto de esta investigación llamaremos articuladores.

4.2. Importancia de abordar el PCx desde los Modos de Pensamiento

Abordar el concepto de PCx en sus tres modos de pensarla –SG-PCx, AA-PCx y AE-PCx– reporta la presencia o ausencia de un pensamiento sistémico en los aprendices de geometría vectorial al resolver situaciones en contextos tridimensionales y fuera de ellos. Uno de los rasgos del pensamiento sistémico es que se enfoca en el establecimiento y estudio de las relaciones entre los conceptos y su caracterización dentro de un sistema (Modos de Pensar el PCx) que también contiene otros conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

Se considera que la articulación de estos tres modos de pensar del PCx es primordial para la comprensión y el aprendizaje de los conceptos básicos de la geometría vectorial. La desarticulación entre esos modos puede ser la causa de obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del álgebra con geometría ya que sólo la articulación de los tres modos de pensarla ayudaría a remontarlos de su mecanización, y en consecuencia el dominio de la habilidad para articularlos se torna fundamental en el aprendizaje de la geometría vectorial y su uso.

4.3. Objetivo de investigación desde el marco teórico

La presente investigación desde los elementos del marco teórico de los Modos de Pensamiento se sitúa en la comprensión (interacción entre los Modos de Pensar) del concepto PCx con la intención de analizar y mostrar evidencias con sustento teórico de cómo profesores en formación inicial que han cursado la asignatura de Geometría Vectorial, o su equivalente, se posicionan y articulan los Modos de Pensar el PCx.

5. Método

Desde el paradigma cualitativo se ha escogido el estudio de caso (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto ya que permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un contexto global.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos de estudio fueron: (a) Ser estudiante de Pedagogía en Matemáticas; (b) Haber sido estudiante del curso Geometría Vectorial y (c) Accesibilidad de los investigadores. Los casos quedaron constituidos tal como se presentan en la tabla 3.

• **Tabla. 3** Casos de estudio

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	5 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas de la Universidad 1	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Fundamentos de Matemáticas	E1, E2, E3, E4, E5
Caso II	4 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas de la Universidad 2	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Geometría Vectorial	E6, E7, E8, E9

Fuente: Elaboración propia

5.1. Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito constituido por una secuenciación de actividades, como se muestra en la tabla 4. Las actividades fueron resueltas en forma individual por cada estudiante, con lápiz y papel, en 120 minutos, aproximadamente.

• **Tabla 4.** Actividades del cuestionario

Actividades	Preguntas asociadas
<p>Actividad A</p> <p>Dados los vectores $\vec{a} = (1,0,0)$ y $\vec{0} = (0,0,0)$.</p>	<p>A.1 Muestra un vector \vec{b} en \mathbb{R}^3 tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector \vec{b} que cumpla la condición? Justifica.</p> <p>A.2 Interpreta geoméricamente la (las) solución(es) encontrada(s) en A.1.</p>
<p>Actividad B</p> <p>Sea $\vec{a} = 2i = (2,0,0)$ vector en \mathbb{R}^3, contenido en el plano $z = 0$.</p> <p>El vector $\vec{b} = 2.6i + 1.5j = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\ \vec{b}\ = 3$. Y el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} es $\theta = 30^\circ$.</p> <p>El vector $\vec{c} = 3j = (0,3,0)$, donde $\ \vec{c}\ = 3$. Y el ángulo entre \vec{a} y \vec{c} es $\theta = 90^\circ$.</p>	<p>B.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{b} es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{c}? Justifica tu respuesta.</p> <p>B.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por \vec{a} y \vec{b} y por \vec{a} y \vec{c} diferentes, ¿la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.</p> <p>B.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6i + 1.5j = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\ \vec{d}\ = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$. Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$ (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{a} y \vec{d} con los formados por los vectores \vec{a} y \vec{b} y los vectores \vec{a} y \vec{c} (mayor, menor o igual). Justifica.</p> <p>B.4 Determina un vector \vec{e} con $\ \vec{e}\ = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores \vec{a} y \vec{e} sea igual a cero. ¿Hay más de un vector \vec{e} que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.</p>

Fuente: Elaboración propia

5.2. Análisis de las actividades

En el caso de la presente investigación se considera como fragmento matemático de estudio el PCx y se opta por un análisis matemático del PCx que permite sustentar los tres modos de pensar PCx (tabla 2) que, a través de actividades que se proponen (tabla 4), se consideran indicadores (tabla 5) para posicionar el dato que se lee de los argumentos observables de las respuestas dadas por los informantes, lo que permite detectar movilidad entre los modos de pensar el PCx, lo cual se traduce en identificar articuladores entre los modos del PCx para poder establecer elementos explícitos que permiten la interacción entre los modos. En particular, en la estrategia de análisis:

- ◊ Se usan como unidades de análisis las respuestas de los estudiantes, enfocadas en representaciones y argumentos empleados.
- ◊ Se interpretan las respuestas de los estudiantes de acuerdo con el modelo teórico (tabla 5).

Los puntos anteriores indican que la estrategia de análisis obedece a un análisis de contenido de los documentos observables de los informantes, en concordancia con los indicadores de la tabla 5.

Actividad A.

En general, la primera actividad busca mostrar las maneras de proceder matemáticamente de los estudiantes, las que paralelamente se van situando en los modos de pensar el PCx de la tabla 2.

En lo específico:

A.1 Promueve un trabajo en la propiedad P1, o bien, que transite desde AA-PCx a P1. El objetivo de A.1 es mostrar que aquellos estudiantes que presentan dificultades para articular el modo AA-PCx con el modo AE-PCx es debido a que no entienden el objeto matemático de PCx en más de un modo de pensamiento.

Cuando un estudiante responde a la actividad A.1 lo más esperado es que él se haya situado en un modo AA-PCx para luego realizar el tránsito hacia el modo AE-PCx. Consideramos que los estudiantes privilegian el modo AA-PCx por sobre otros modos de pensamiento del PCx.

A.2 Propicia el modo de pensar SG-PCx sobre la solución determinada en A.1, lo que interpretamos como un tránsito desde el modo AE-PCx al modo SG-PCx a través de P1.

Actividad B.

En concordancia con la actividad A, la actividad B busca evidencias de elementos que el estudiante usa para transitar desde un modo SG-PCx hacia el AE-PCx, o bien, que se sitúe directamente en AE-PCx para dar solución a esta actividad B.

En la actividad B las preguntas B.1, B.2, B.3 y B.4 están planteadas situándose en un enfoque SG-PCx ya que las cuatro interrogantes promueven el área del paralelogramo formado por los vectores correspondientes en cada caso; son cálculos de áreas que los estudiantes pueden visualizar si logran pensar en el objeto PCx en su forma geométrica. Las preguntas B.1, B.2 y B.3 tienen dos objetivos: el primero de ellos es observar si los estudiantes responden situándose ya sea en el modo AA-PCx o en el modo SG-PCx o se sitúan directamente en el del modo AE-PCx, lo cual les permitiría reducir los cálculos aritméticos. Y el segundo objetivo, que tributa a nuestro objetivo general de investigación, es aportar información para que el estudiante pueda realizar de mejor forma el tránsito entre el modo SG-PCx y el modo AE-PCx que se pregunta en B.4. El objetivo individual de B.4 es mostrar que aquellos estudiantes que tuvieron dificultades para transitar desde el modo AA-PCx al modo AE-PCx en la actividad A pueden –en esta segunda oportunidad– abordar las dificultades para lograr transitar del modo SG-PCx hacia el modo AE-PCx.

En lo específico:

B.1 Promueve que el estudiante se sitúe directamente en el modo AE-PCx utilizando las fórmulas de $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ o de $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ indistintamente, para el cálculo del área del paralelogramo. O bien, que el estudiante se sitúe en el modo SG-PCx dibujando los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados, determinando así cuál de ellos tiene mayor área.

B.2 Propicia que el estudiante se sitúe directamente en el modo AE-PCx, calculando el “área” del paralelogramo formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} , que es igual a la “longitud” del producto $\vec{a} \times \vec{b}$. Análogamente para los vectores \vec{a} y \vec{c} estos cálculos le permitirán establecer la relación de desigualdad referente a las longitudes, sin realizar cálculos aritméticos. O bien, promueve que el estudiante se sitúe en el modo AA-PCx, calculando las longitudes de los productos vectoriales, utilizando para ello la mnemotecnica del seudodeterminante para calcular el vector PCx y, posteriormente, la norma de éste para luego determinar las relaciones entre longitud y área respectivas.

B.3 Promueve que el estudiante logre determinar las relaciones de desigualdad solicitadas en la pregunta, situándose en el modo AE-PCx. Si la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ es: $\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|(0,0,3)\| = \sqrt{9} = 3$

se tiene entonces que la longitud de $\vec{a} \times \vec{d}$ es igual a la longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ y, por tanto, menor a la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$, lo que en conjunto con las respuestas de B.1 y B.2 permite determinar las relaciones de desigualdad entre las áreas de los paralelogramos y las longitudes de los PCx, dando cuenta así del comportamiento del producto vectorial a medida que crece el ángulo, el cual es similar al de la *función seno*. O bien, propicia que el estudiante se sitúe en el modo AA-PCx, lo que le permite determinar que el producto entre $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al de $\vec{a} \times \vec{d}$, esto le permite establecer las relaciones de desigualdad en las áreas y las longitudes, apoyándose de las respuestas dadas en B.1 y B.2.

B.4 Propicia el trabajo del SG-PCx hacia AE-PCx a través de P1. Ahora, para analizar las respuestas de los estudiantes a las actividades, se proponen en la tabla 5 indicadores que situarán los argumentos observables de las respuestas de los estudiantes a las actividades A y B en modos de pensar el PCx, según la tabla 2.

• **Tabla 5.** Indicadores para cada modo de pensar el PCx

Modos de pensar	Indicadores <i>a priori</i>
SG-PCx	Se dibujan cada uno de los vectores y, con base en ello: - Dibuja el vector correspondiente al PCx. - Dibuja el ángulo recto que forma el PCx con el plano que generan sus vectores. - Dibuja el paralelogramo formado por los vectores.
AA-PCx	Determina los componentes algebraicamente, y el PCx es el resultado de realizar el producto de dos vectores, ambos de tres coordenadas.
AA-PCx → AE-PCx	Determina el conjunto de vectores “ \vec{b} ” linealmente dependientes al vector \vec{a} , con base en $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
AE-PCx	Con base en la fórmula $\ \vec{u} \times \vec{v}\ = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \text{sen}\theta$, en este modo de pensamiento, situarse en él significa que el estudiante: -Reconoce la relación implícita que la fórmula establece entre la longitud del producto $\vec{u} \times \vec{v}$, la cual es igual al área del paralelogramo entre los vectores \vec{u} y \vec{v} , lo que le permite establecer relaciones como, por ejemplo: si dos paralelogramos tienen igual área entonces las longitudes de los vectores productos vectoriales respectivos también lo son. -Utiliza las fórmulas de $\ \vec{u} \times \vec{v}\ $ o de $\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \text{sen}\theta$ indistintamente, para el cálculo de área del paralelogramo o de la longitud del producto vectorial.

Fuente: Elaboración proia

6. Resultados

Desde la perspectiva de los modos de pensar el PCx, se presentan las respuestas de los estudiantes por caso de estudio a las dos actividades. Comenzamos con una panorámica que muestra los resultados generales, por caso de estudio, y en la tabla 6 se sintetizan las respuestas representativas, por caso de estudio, a cada una de las actividades.

En la tabla 6 también se agrupa el colectivo de estudiantes participantes y se explicitan argumentos representativos de ese colectivo, donde el foco de atención está puesto en aquellos estudiantes que transitan de un modo de pensar el PCx a otro.

• **Tabla 6.** Respuestas del colectivo de estudiantes que muestran, en sus argumentos, articulación entre los modos de pensar el PCx

	Respuestas Actividad 1	Respuestas Actividad 2
Caso I	<p>1.1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Transita desde el modo AA-PCx al modo AE-PCx a través de P1, determinando las componentes del PCx, o bien, utilizando la mnemotecnia del pseudodeterminante y, a partir de allí, determina el conjunto solución de todos los vectores linealmente dependientes al vector \vec{a}. 	<p>2.1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en el modo de pensar AE-PCx utilizando la parte derecha de la fórmula $\ \vec{u} \times \vec{v}\ = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \operatorname{sen}\theta$, o sea, $\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \operatorname{sen}\theta$ para el cálculo del área de los paralelogramos. <p>2.2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en AE-PCx utilizando la relación implícita que establece la fórmula $\ \vec{u} \times \vec{v}\ = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \operatorname{sen}\theta$, esto es: la longitud del producto $\vec{u} \times \vec{v}$ que es igual al área del paralelogramo entre los vectores \vec{u} y \vec{v}, no necesitando realizar cálculos aritméticos.
	<p>1.2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Transita desde el modo SG-PCx al modo AE-PCx a través de la norma de un vector de \mathbb{R}^3 ya que a partir del dibujo realizado determina el conjunto de vectores linealmente dependientes con el vector \vec{a}. 	<p>2.3</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en el modo AE-PCx ya que utiliza la parte derecha de la fórmula $\ \vec{u} \times \vec{v}\ = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \operatorname{sen}\theta$ para calcular tanto la longitud del producto $\vec{a} \times \vec{d}$, así como el área del paralelogramo que se forma entre estos vectores, estableciendo luego las relaciones de desigualdad de áreas y longitudes solicitadas en la pregunta. <p>2.4</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en el modo AE-PCx y a través de la norma de un vector de \mathbb{R}^3 determinando el conjunto solución de vectores $\vec{b} = (x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, pero no logra determinar sólo los vectores solución $\vec{e}_1 = (-3, 0, 0)$ y $\vec{e}_2 = (3, 0, 0)$ dada su longitud de tres unidades.
Caso II	<p>1.1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Transita desde el modo AA-PCx al modo AE-PCx a través de la norma de un vector de \mathbb{R}^3, para lo cual determina las componentes del PCx utilizando la mnemotecnia del pseudodeterminante y luego determina el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a}. 	<p>2.1</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en el modo AE-PCx afirmando que el área del paralelogramo se puede calcular de dos formas: con $\ \vec{a} \times \vec{b}\$ o con $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}\theta$, de las cuales escoge $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}\theta$ para calcular el área respectiva, determinando que $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$. <p>2.2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en el modo AE-PCx utilizando la relación implícita que establece la fórmula $\ \vec{a} \times \vec{b}\ = \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}(\theta)$, por lo que concluye que si $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$ entonces la longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ es menor que la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$. Observación: El situarse directamente en este modo AE-PCx le permite responder sin realizar cálculo aritmético alguno.
	<p>1.2</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Transita desde el modo SG-PCx al modo AE-PCx a través de la norma de un vector de \mathbb{R}^3 ya que a partir del dibujo realizado da evidencia de entender el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a}. 	<p>2.3</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Se sitúa en AE-PCx calculando el área del paralelogramo con la fórmula $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}(\theta)$. A partir de allí determina las relaciones de desigualdad de áreas y longitudes solicitadas. <p>2.4</p> <ul style="list-style-type: none"> • Respuesta incorrecta. • Coordinación entre los modos AA-PCx y AE-PCx. Primero se sitúa en AE-PCx utilizando la fórmula $\ \vec{a} \times \vec{b}\ = \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}(\theta)$ donde para que el área sea cero se tiene $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \operatorname{sen}(\theta) = 0$, por lo que para que se cumpla esta igualdad el argumento de la función seno debe tomar los valores de 0° y 180°, esto le permite al estudiante determinar que los vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} son: $\vec{e} = \lambda \vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda \vec{a}$, situándose así en el modo AE-PCx a través de la norma de un vector de \mathbb{R}^3.

Fuente: Elaboración propia



6.1. Resultados por actividad

Para mostrar en profundidad las respuestas dadas a cada una de las actividades se ha seleccionado un representante de cada caso. E4 como representante del Caso I y E7 del Caso II, por el tipo de argumentos que han utilizado para dar respuesta a esas actividades.

6.1.1. Actividad A

a) Estudiante del Caso I

En la respuesta A.1 el estudiante E4 se sitúa desde un modo de pensar AA-PCx, determinando los componentes de éste, para lo cual utiliza la mnemotecnía del seudo determinante, luego en la respuesta vemos que el vector PCx se iguala con el vector nulo, determinando así el vector solución $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$. Con base en la figura 6 podemos evidenciar que E4 logra transitar del modo AA-PCx hacia P1.

•Figura 6. Reproducción de la respuesta de E4 a la actividad A.1

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = j \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= j(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Tenemos que $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 0) \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = j(0 \cdot b_3 - 0 \cdot b_2) - j(1 \cdot b_3 - 0 \cdot b_1) + k(1 \cdot b_2 - 0 \cdot b_1)$$

$$= j(0) - j b_3 + k b_2 = (0, -b_3, b_2)$$

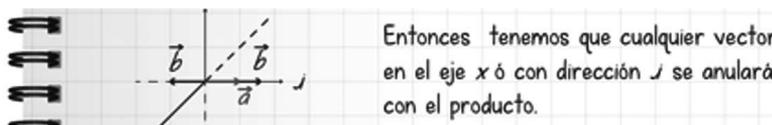
Entonces, $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow b_3 = b_2 = 0$, el valor de la coordenada en b_1 no importa que valor tome ya que siempre se anulara con el producto, finalmente tenemos:

$$\vec{b} = (b_1, 0, 0). \quad (\text{Tiene infinitas soluciones}).$$

Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A1 (ver Apéndice¹)

En la actividad A.2 vemos que, efectivamente, el estudiante E4 comprende que cualquier vector del conjunto solución es linealmente dependiente con el vector \vec{a} . Por otro lado, entender que son colineales no necesariamente indica entender que son linealmente dependientes, logrando a través de este argumento transitar desde un modo SG-PCx hacia P1, como lo muestra la figura 7.

•Figura 7. Reproducción de la Respuesta de E4 a la actividad A.2



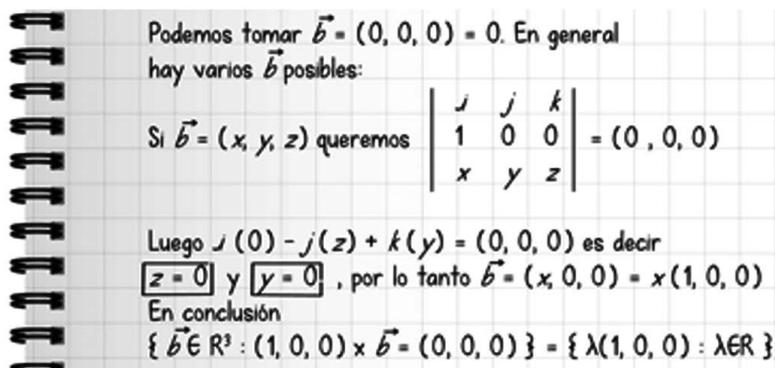
Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A2 (ver Apéndice)

¹Para consultar los apéndices, haga clic en el enlace de los apéndices que se encuentran ubicados al final del documento.

b) Estudiante del Caso II

Para responder A.1 el estudiante E7 realiza un tránsito entre el modo AA-PCx del producto vectorial al modo AE-PCx a través de la linealidad, este tránsito lo realiza utilizando como articulador el seudodeterminante con el cual determina las componentes del producto vectorial, para luego encontrar el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} , como se muestra en la figura 8.

• **Figura 8.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad A.1



Podemos tomar $\vec{b} = (0, 0, 0) = 0$. En general hay varios \vec{b} posibles:

Si $\vec{b} = (x, y, z)$ queremos $\begin{vmatrix} j & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$

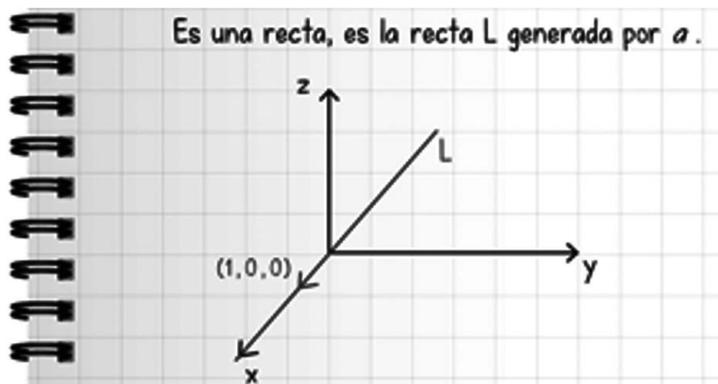
Luego $j(0) - j(z) + k(y) = (0, 0, 0)$ es decir $\boxed{z=0}$ y $\boxed{y=0}$, por lo tanto $\vec{b} = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$

En conclusión $\{\vec{b} \in \mathbb{R}^3 : (1, 0, 0) \times \vec{b} = (0, 0, 0)\} = \{\lambda(1, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A3 (ver Apéndice)

En la actividad A.2, E7 muestra en la figura 9 entender el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} desde un modo de pensar SG-PCx transitando a P1.

• **Figura 9.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad A.2



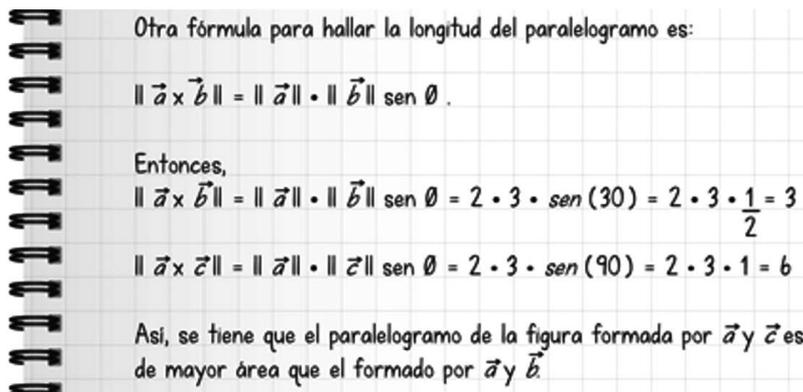
Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A4 (ver Apéndice)

6.1.2. Actividad B

a) Estudiante del Caso I

En la actividad B.1 el estudiante E4 responde situándose directamente sobre el modo AE-PCx ya que usa la fórmula $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$, donde observamos (figura 10) que utiliza la parte derecha de ella $\|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$, determinando con ella el área de los paralelogramos respectivos.

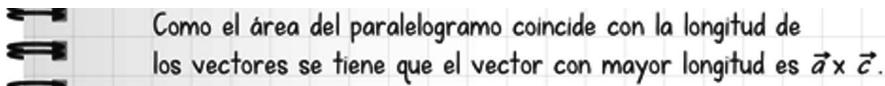
• **Figura 10.** Reproducción de la respuesta de E4 a la actividad B.1



Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A5 (ver Apéndice)

En la actividad B.2, E4 responde situándose nuevamente sobre el modo AE-PCx del producto vectorial ya que utiliza la relación implícita que se deduce de la fórmula $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$; esta relación es que la longitud del producto vectorial entre \vec{u} y \vec{v} es igual al área del paralelogramo que se forma entre los vectores \vec{u} y \vec{v} , como se muestra en la figura 11.

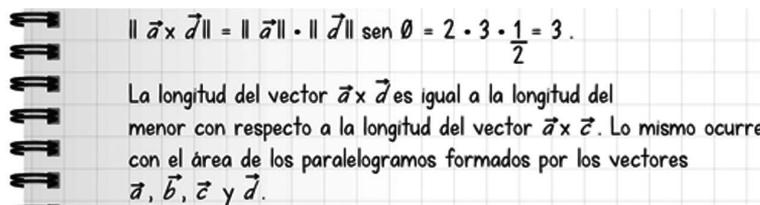
• **Figura 11.** Reproducción de la respuesta de E4 a la actividad B.2



Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A6 (ver Apéndice)

En la actividad B.3 E4 vuelve a situarse en AE-PCx, determinando con la fórmula $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$ (parte derecha de ella $\|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta$) tanto la longitud de $\vec{a} \times \vec{d}$ como el área del paralelogramo entre \vec{a} y \vec{d} , lo que le permite determinar que esta área es igual al área del paralelogramo formado entre \vec{a} y \vec{d} y, como se muestra en la figura 12.

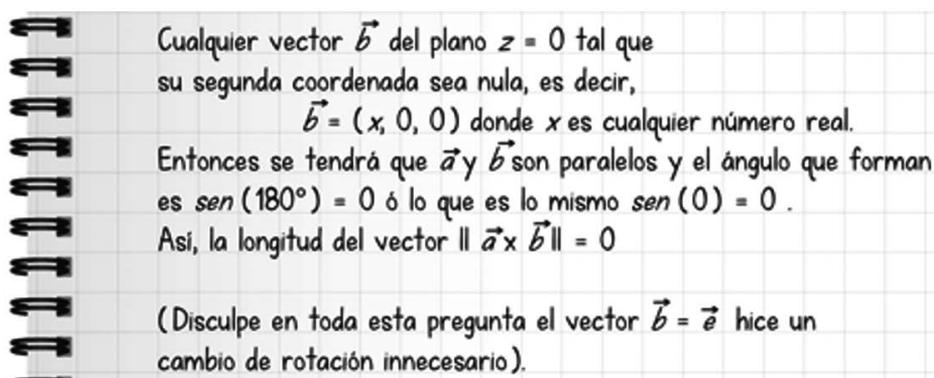
• **Figura 12.** Reproducción de la respuesta de E4 a la actividad B.3



Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A7 (ver Apéndice)

En la actividad B.4, E4 responde que la solución es el vector $\vec{b} = (x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$ y luego da una característica importante de los vectores \vec{a} y \vec{b} , esto es, que son paralelos, y además que el ángulo que forman puede ser de 0° o de 180° , para lo cual utiliza la función *seno*, ambas son características de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} . Lo anterior permite afirmar que el estudiante E4 logra situarse en el modo AE a través de P1 pero no determina los dos vectores solución $\vec{e} = (-3, 0, 0)$ y $\vec{e} = (3, 0, 0)$ dado que la longitud de estos vectores debe ser de 3 unidades, como se muestra en la figura 13.

• **Figura 13.** Reproducción de la respuesta de E4 a la actividad B.4



Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A8 (ver Apéndice)

b) Estudiante del Caso II

En B.1 el estudiante E7 responde situándose directamente en el modo AE-PCx ya que determina que para calcular el área del paralelogramo entre los vectores \vec{a} y \vec{b} se puede utilizar $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ o la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$, y escogiendo $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$ E7 responde correctamente a la pregunta que relaciona las áreas de los paralelogramos, como se muestra en la figura 14.

• **Figura 14.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad B.1

El área del paralelogramo generado por \vec{a} y \vec{b}
 es $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ (esto es un teorema de geometría vectorial)

y también se tiene $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$ (otro teorema)
 $\theta = \text{ángulo entre } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$

luego $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$

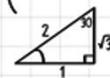
área del paralelogramo
 generado por \vec{a} y \vec{b}

El área $(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta) = \underbrace{\|\vec{a}\|}_{2} \cdot 3 \text{sen}(30^\circ)$

El área $(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a}\| \|\vec{c}\| \text{sen}(\theta) = \underbrace{\|\vec{a}\|}_{2} \cdot 3 \text{sen}(90^\circ)$

Como $\text{sen}(30^\circ) < \text{sen}(90^\circ)$ $\left(\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}, \text{sen}(90^\circ) = 1 \right)$

Concluimos que
 $\text{Área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{Área}(\vec{a}, \vec{c})$



Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A9 (ver Apéndice)

El estudiante E7 en la respuesta B.2 también se sitúa desde el modo AE-PCx, entendiéndolo la relación implícita de la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{sen}(\theta)$, la cual establece que la longitud del producto vectorial entre \vec{a} y \vec{b} es igual al área del paralelogramo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{b} , lo que le permite responder sin realizar cálculo alguno que si las áreas de los paralelogramos están en la relación $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$, entonces la longitud del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es menor que la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$, como se muestra en la figura 15.

• **Figura 15.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad

Por lo dicho anteriormente tenemos $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
 $\text{área}(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a} \times \vec{c}\|$
 con $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$ tenemos $\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$

B.2.Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A10 (ver Apéndice)

En la respuesta a B.3 el estudiante E7 se sitúa nuevamente en el modo AE-PCx, calculando primeramente el área del paralelogramo entre \vec{a} y \vec{d} para luego determinar las relaciones de desigualdad solicitadas en la pregunta, como se muestra en la figura 16.

• **Figura 16.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad

$\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{d}\| \text{sen}(\theta) = \underbrace{\|\vec{a}\|}_{2} \cdot 3 \underbrace{\text{sen}(150^\circ)}_{\text{sen}(30^\circ)} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

luego $\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$

B.3.Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A11 (ver Apéndice)

La respuesta de E7 a la actividad B.4 da cuenta de que el estudiante E7 coordina el modo AE-PCx y P1. Primero se sitúa en AE-PCx utilizando la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\theta)$ donde, para que el área sea cero, o sea $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\theta) = 0$, el argumento de la función *seno* puede tomar los valores de 0° y 180° , esto le permite determinar que los vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} son $\vec{e} = \lambda\vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda\vec{a}$, situándose así en P1. Luego, dado que su longitud debe ser 3, se tiene que $\vec{e} = (-3,0,0)$ o que $\vec{e} = (3,0,0)$, como se muestra en la figura 17.

• **Figura 17.** Reproducción de la respuesta de E7 a la actividad

Queremos
 $0 = \text{Área}(\vec{a}, \vec{e})$ pero $\text{área}(\vec{a}, \vec{e}) = \|\vec{a} \times \vec{e}\| = \underbrace{\|\vec{a}\|}_2 \underbrace{\|\vec{e}\|}_3 \operatorname{sen}(\theta)$
 luego debemos tener $\operatorname{sen}(\theta) = 0$ es decir $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$
 por lo tanto $\vec{e} = \lambda\vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda\vec{a}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$
 como $\|\vec{e}\| = 3$ debemos tener $\|\lambda\vec{a}\| = 3$ ($\|-\lambda\vec{a}\| = \|\lambda\vec{a}\|$)
 $\lambda \cdot \|\vec{a}\| = 3$ (pues $\lambda > 0$)
 $\lambda \cdot 2 = 3$
 $\lambda = \frac{3}{2}$
 En conclusión
 $\{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{e}\| = 3 \wedge \text{área}(\vec{a}, \vec{e}) = 0\} = \left\{ \frac{3}{2}\vec{a}, -\frac{3}{2}\vec{a} \right\}$
 $= \{(3, 0, 0), (-3, 0, 0)\}$
 Hay dos posibilidades: $\vec{e} = (3, 0, 0)$
 ó $\vec{e} = (-3, 0, 0)$

B.4.Fuente: Reproducción del registro real de la Figura A12 (ver Apéndice)

7. Conclusiones

Los estudiantes de los casos I y II, en sus respuestas, tanto de la actividad A como de la actividad B, se sitúan en la mayoría de las veces directamente en el modo AE-PCx, evidenciando que al responder desde este modo no se hacen necesarios los cálculos aritméticos sino que basta el argumento que proviene del entendimiento de este modo estructural del PCx.

La importancia de diseñar la actividad A focalizándola en un modo AA-PCx hacia el modo AE-PCx para luego plantear la actividad B desde un SG-PCx hacia el AE-PCx permitió, desde la perspectiva teórica del investigador, suponer que los estudiantes de los casos I y II lograrían la comprensión del PCx si podían responder adecuadamente que cuando $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ no necesariamente \vec{a} o \vec{b} es un vector nulo. Sin embargo, la actividad A presentó una dificultad para los estudiantes que se relaciona con interpretar el conjunto solución de vectores linealmente dependientes obtenidos de resolver la ecuación

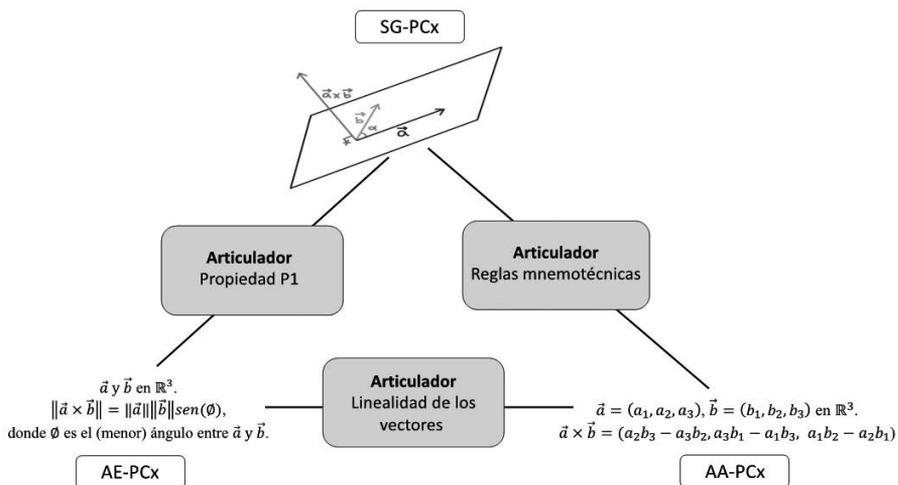
$(1,0,0) \times (b_1, b_2, b_3) = (0,0,0)$, conjunto solución que puede ser determinado situándose en más de un modo de pensar el PCx y sin la realización de cálculos aritméticos.

En relación con la articulación entre los modos AE-PCx y el AA-PCx fue posible evidenciar que el estudiante E7 utiliza la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{e}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{e}\| \text{sen}\theta$ correspondiente al modo AE-PCx, igualándola a cero, lo que le permite determinar que para que $\|\vec{a}\| \|\vec{e}\| \text{sen}\theta$ sea igual a cero, necesariamente $\text{sen}\theta = 0$, por lo que el ángulo θ debe ser igual a 0° o 180° , es decir, $\vec{e} = \lambda\vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, determinando así los vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} , correspondiente al modo AA-PCx. Lo anterior muestra que la linealidad de los vectores actúa como articulador entre los modos AE-PCx y AA-PCx.

Sin embargo, la articulación entre el modo SG-PCx y AE-PCx significa que el estudiante se sitúa en el modo SG-PCx y desde allí determina las componentes del PCx por medio de la solución de la ecuación $\vec{a} \times \vec{b}$, donde \vec{b} es el vector buscado, y de esta forma transita al modo AE-PCx a través de la propiedad P1, logrando identificar que el vector \vec{b} corresponde al conjunto de vectores linealmente dependientes al vector \vec{a} . Esto último evidencia que la propiedad P1 es el elemento articulador entre SG-PCx y AE-PCx.

En cuanto a los elementos matemáticos que permiten la articulación entre los tres modos de pensamiento, podemos señalar en la figura 18 que la mnemotecnica del pseudodeterminante es el elemento articulador entre SG-PCx y AA-PCx; la propiedad P1 el articulador entre SG-PCx y AE-PCx, y la linealidad de los vectores el articulador entre AA-PCx y AE-PCx.

•Figura 18. Articuladores entre los modos de pensar el PCx



Fuente: Elaboración propia



Con base en el modelo que se presenta en la figura 18 podemos establecer que cuando el estudiante expone en explícito como argumento observable los articuladores entre los modos de pensar PCx pone en evidencia todos los elementos que propician la comprensión de este producto, y más aún que cuando AA-PCx, AE-PCx y SG-PCx interactúan podemos decir que emerge la comprensión del PCx. En relación con esto último, la hipótesis de Barniol y Zavala (2014) es verdadera, a menos que los estudiantes logren una articulación o interacción entre varios significados del PCx. Deprez *et al.* (2019) señalan que la familiaridad con la regla de la mano derecha en un contexto específico mejora el desempeño de los estudiantes en el uso del PCx, pero también induce a errores de contexto. Uso erróneo de la regla de la mano derecha, problemas de interpretación de la conmutatividad del PCx y errores de signo fueron comunes tanto en el contexto físico como matemático. Lo dicho por estos investigadores, efectivamente, se pone de manifiesto en los resultados de la presente investigación a través de la interacción de los tres modos de pensar el PCx mediante tres articuladores puestos en explícito en la figura 18.

La forma de describir los modos de pensar y sus articuladores de la figura 18 va en la dirección de lo que Sierpinska (2005) ha propuesto como la contraposición entre el pensar práctico –en nuestro caso, el SG-PCx– y el pensar teórico –en nuestro caso, el AA-PCx y AE-PCx– de la matemática, donde cada uno de ellos tiene características en cuanto a su objetivo, objeto e intereses, como se aprecia en la tabla 7.

• **Tabla 7.** Pensamiento teórico versus Pensamiento práctico

	Pensamiento Teórico	Pensamiento Práctico
Objetivo	Comprende la experiencia y reflexiona sobre los posibles resultados de una acción, para no llevar a cabo una acción.	Toma decisiones relativas a la acción inmediata.
Objetos	Sistemas de conceptos.	Objeto concreto (aislado).
Principales preocupaciones	Significado de los conceptos. Se refiere a conexiones conceptuales. Se refiere a la coherencia conceptual y a la coherencia interna de los sistemas de representaciones simbólicas (validez epistemológica).	Importancia de las acciones. Se refiere a hechos. Se refiere a la validez de los hechos observables.

Fuente: Sierpinska (2005)

Consideramos que el contenido del cuestionario planteado en las tablas 4, 5 y 6 se puede replantear como una propuesta didáctica que tribute a desarrollar los articuladores de la figura 18, construyendo en los profesores en formación de Matemática una visión más amplia del concepto PCx que les permitirá en el futuro aprender estructuras más generales de la matemática y con articulación de diferentes significados.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada parcialmente por ANID a través del Proyecto FONDECYT N° 1180468.

Se declara que la obra que se presenta es original, no está en proceso de evaluación en ninguna otra publicación, así también que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

Referencias

- Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. España: Editorial Reverté, S. A.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky y T. Dick (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1-32). Estados Unidos de América: Sociedad Matemática Americana. doi: 10.1090/cbmath/006/01
- Barniol, P. y Zavala, G. (2014). Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español. *Revista Mexicana de Física*, 60(2), 86-102.
- Benítez, R. (2015). *Geometría vectorial*. México: Trillas.
- Deprez, T., Gijssen, S. E., Deprez, J. y Cock de, M. (2019). Investigating student understanding of cross products in a mathematical and two electromagnetism contexts. *Physical Review Physics Education Research*, 15, 020132. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020132
- Dorier, J. L. (1997) (ed.). *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4.ª Ed.). México: Pearson.
- Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (1991). *Cálculo vectorial* (3.ª ed.). Nueva York, EUA: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Martínez, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(2), 201-208.
- Parraguez, M. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento. Didáctica de la Matemática*. Chile: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto Espacio Vectorial. *Revista Educación Matemática*, 25(1), 133-154.

- Parraguez, M. y Guerra, R. (2020). Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial. En Y. Morales y Á. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019*. República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2047-2054.
- Parraguez, M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150. doi: 10.5565/rev/ensciencias.1950
- Parraguez, M. y Okaç, A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Revista del Centro de Investigaciones Educativas PARADIGMA*, 33(1), 103-134.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (3.a Ed.). México: Cengage Learning.
- Rodríguez, M., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial \mathbb{R}^2 . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 57-86. doi: 10.12802/relime.18.2113
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. Dorier (Ed.), *En On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8
- Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 117-135). Boston, Estados Unidos: Springer. doi: 10.1007/0-387-24270-8_11
- Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Okaç, A. (2002). A Study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Montreal, Canadá: Concordia University.
- Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª ed.). Barcelona, España: Morata
- Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2002) *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado de <http://homepages.ohiodominican>

Link para consultar Apéndices

<https://www.ipn.mx/assets/files/innovacion/docs/Innovacion-Educativa-91/Apendices-comprension-del-producto-cruz.pdf>

Semblanza

Marcela Parraguez González. Es doctora en Matemática Educativa, profesora titular e investigadora en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Ocupó un cargo directivo en la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIAM), fue directora del posgrado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, directora del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y fue integrante del Consejo Directivo del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). A la fecha ha graduado a más de una treintena de magíster en Didáctica de la Matemática y seis doctores en Didáctica de la Matemática. Sus publicaciones y proyectos de investigación se inscriben en la línea de pensamiento matemático avanzado, formación de profesores y resolución de problemas.



Rosario Guerra Martínez. Es licenciada en Educación y titulada en Pedagogía en Matemáticas y Computación por la Universidad Católica del Norte (UCN) en Antofagasta, Chile, y obtuvo el grado de Magister en Didáctica de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Ha realizado variados cursos en Delta UCN que es un centro de investigación y desarrollo de talentos, esos cursos tienen como característica la articulación entre la matemática y un *software* de geometría dinámica. Tiene experiencia en impartir cursos para las carreras de Pedagogía en Educación Básica, Pedagogía en Educación Media e Ingeniería Plan común en la UCN. Actualmente es mentora del Programa Sumo Primero en Terreno, perteneciente al centro Felix Klein de la Universidad de Santiago de Chile, donde realiza gestiones para efectuar diversas acciones del Programa en escuelas de Antofagasta.

Francisco Javier Lezama Andalón. Doctor en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Es miembro desde 2011 del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel 1. Miembro del grupo de diseñadores del Programa de Matemática Educativa Prome, en la modalidad "en línea", en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del IPN. A partir de 2017 es miembro regular de la Academia de la Investigación Científica de México, es fundador de la Red Social DocenMat (Docencia en Matemáticas) y profesor de matemáticas desde 1979. Su línea de investigación es la de estudios sobre el profesor de matemáticas: reproducibilidad de situaciones didácticas, identidad del profesor, conocimientos del profesor y su desarrollo profesional docente.