

La educación matemática en el siglo XXI

La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz / Patricia Camarena Gallardo
COORDINADORES



COLECCIÓN PAIDEIA SIGLO XXI



La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz y Patricia Camarena Gallardo, coordinadores

Primera edición 2015

D.R. ©2015 Instituto Politécnico Nacional

Av. Luis Enrique Erro s/n

Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”, Zacatenco,

Del. Gustavo A. Madero, C. P. 07738, México, D. F.

Libro formato pdf elaborado por:

Coordinación Editorial de la Secretaría Académica

Secretaría Académica, 1er. Piso,

Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”

Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738

Diseño y formación: Quinta del Agua Ediciones, S.A. de C.V. Cuidado
de la edición: Héctor Siever

ISBN: 978-607-414-497-0

Impreso en México / Printed in Mexico

Índice

Una nota de agradecimiento	9
Introducción. Matemática, futuro e imaginación <i>Xicoténcatl Martínez Ruiz</i>	11
BRASIL	
Educación matemática en Brasil: proyectos y propósitos <i>Maria Salett Biembengut</i>	19
CHILE	
Una visión acerca de la educación matemática en Chile: cómo caracterizar su presente, los principales hitos del proceso de llegar allí y cómo pensar el futuro <i>Fidel Oteiza Morra</i>	41
COSTA RICA	
Costa Rica: una reforma radical en la educación matemática <i>Ángel Ruiz</i>	67
ESPAÑA	
La educación matemática en España <i>José Luis Lupiáñez, Luis Rico Romero, Isidoro Segovia y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo</i>	99
MÉXICO	
Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI <i>Manuel Santos Trigo</i>	133

El aprendizaje de la geometría en el siglo XXI: tres teoremas básicos sobre la línea recta y su demostración	155
<i>Mario García Juárez</i>	
Educación matemática en México: investigación y práctica docente	191
<i>Patricia Camarena Gallardo</i>	
2036: una filosofía prospectiva de la educación matemática	217
<i>Xicoténcatl Martínez Ruiz</i>	
La toma de decisiones durante una clase de matemáticas	233
<i>Miguel Ángel Parra Álvarez</i>	
PERÚ	
Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas	257
<i>Jesús Victoria Flores Salazar y Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre</i>	
PUERTO RICO	
Una aproximación a la matemática educativa en Puerto Rico	279
<i>Orlando Planchart Márquez</i>	
VENEZUELA	
Perspectivas de la educación matemática en Venezuela para el siglo XXI	297
<i>Yolanda Serres</i>	
CONCLUSIONES	
La educación matemática en el siglo XXI: conclusiones del presente y futuro	319
<i>Patricia Camarena Gallardo</i>	
Acerca de los autores	342
Acerca de los profesores entrevistados	349



Perú

Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas

Jesús Victoria Flores Salazar
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

INTRODUCCIÓN

Compartimos la definición que presentan Rico, Sierra y Castro (2000) según la cual la educación matemática es un sistema de conocimientos, planes de formación, instituciones con finalidades formativas, de modo que todos ellos se relacionen con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. También tomamos como referencia el modelo que presenta Higginson (1980) para la educación matemática, según el cual esta brinda elementos para comprender posturas tradicionales sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como las causas que han originado cambios curriculares en el pasado y la previsión de las transformaciones futuras, además de la modificación de concepciones sobre la investigación y sobre la formación de profesores.

Desde esa perspectiva, se exponen los recientes cambios introducidos en la estructura del sistema educativo peruano, en particular en relación con la educación matemática y se describe la influencia que ha tenido la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el desarrollo de la educación matemática en ese país.

De esa manera se brindarán elementos que permitirán conocer los orígenes de la educación matemática en el Perú, sus avances en los últimos años y los desafíos que se presentan en el siglo XXI.

EL SISTEMA EDUCATIVO PERUANO

Desde 2006 el Perú cuenta con un Proyecto Educativo Nacional al 2021, elaborado por el Consejo Nacional de Educación, y que es un instrumento tanto para la formulación como para la ejecución de políticas públicas. Dicho documento incluye objetivos estratégicos, así como resultados esperados para cada uno de ellos.

De otro lado, como ente organizador se cuenta con el Ministerio de Educación del Perú (Minedu), organismo encargado de establecer la política educativa del país y normar la labor educativa, cuyos objetivos fundamentales son:

Generar oportunidades y resultados educativos de igual calidad para todos; garantizar que estudiantes e instituciones educativas logren sus aprendizajes pertinentes y de calidad; lograr una educación superior de calidad como factor favorable para el desarrollo y la competitividad nacional, así como promover una sociedad que educa a sus ciudadanos y los compromete con su comunidad. (Perú, 2009: 45).

Entre las funciones de esta entidad se encuentra la elaboración y actualización del diseño curricular de la educación básica regular del sistema educativo peruano, que contempla el nivel inicial, primario y secundario. También se encarga de establecer programas nacionales dirigidos a la formación y capacitación de directores y profesores. Por otra parte, en relación con los modelos educativos sobre los cuales el Minedu ha realizado propuestas y cambios para el sistema educativo peruano, se observa que estos se han tomado de modelos provenientes de otros países. En especial, durante la última década se puede observar una fuerte influencia del modelo constructivista. Desde esa perspectiva se elaboró un currículo oficial, denominado Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, publicado inicialmente en 2006 y que tuvo una segunda edición en 2009, la cual se encuentra vigente. En ese documento se consideran competencias por ciclos, así como un conjunto de capacidades, conocimientos y actitudes acordes al desarrollo de los estudiantes y detalladas en el marco de cada competencia.

No obstante, en la práctica se encuentran evidencias de la presencia de un modelo conductista muy arraigado en los planes de formación de profesores, en particular en la preparación de maestros de nivel primario y de docentes

de matemáticas de nivel secundario. En esa misma línea de pensamiento, Ramírez (2006) manifiesta que existen serias deficiencias en la formación académica de los estudiantes de la carrera de profesor de Educación Primaria, y como causa principal de este hecho señala los pocos o nulos conocimientos que poseen los docentes en formación sobre la resolución de problemas matemáticos. Esto hace que no puedan enfrentar con éxito la resolución de problemas matemáticos, Piscocoya (2005).

Por otro lado, se cuenta con diversos textos escolares de matemáticas elaborados por editoriales privadas, utilizados en los centros educativos particulares y públicos del Perú, que afirman seguir las directrices del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Sin embargo, dichos textos no han sido elaborados partir de un modelo de competencias; se ha encontrado que la forma en la que abordan los contenidos matemáticos se caracteriza por presentar inicialmente un bloque teórico o técnico, seguido de problemas de aplicación directa, sin una problematización inicial que justifique la introducción de la técnica. Además, los temas están desconectados unos de otros.

Ante la situación descrita, el Minedu realiza esfuerzos para proporcionar herramientas a los profesores de los niveles primario y secundario, de modo que logren cubrir los vacíos que presenta su formación. Estos se ven plasmados en documentos tales como “Rutas para el aprendizaje”, “Materiales educativos” y “Orientaciones para la implementación de unidades didácticas y sesiones de aprendizaje”.

Además, en los últimos años se han iniciado programas de perfeccionamiento docente a través de estudios de maestría en educación, en particular de maestrías de enseñanza de las matemáticas. Dichos programas son financiados con recursos públicos y las becas son asignadas a través de concursos de méritos a docentes de toda la nación.

Para complementar la descripción de la situación actual del sistema educativo peruano, cabe señalar que existe una entidad técnica denominada Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa (Sineace), cuya función es establecer los criterios, estándares y procesos de evaluación, acreditación y certificación que legitimen los niveles básicos de eficacia que deben ofrecer las instituciones educativas en el Perú. Dicho organismo viene trabajando durante los últimos años de manera coordinada con el Minedu y es responsable de la elaboración de estándares nacionales de aprendizaje para la educación básica. Así, desde el año 2013

se cuenta con los denominados “Mapas de progreso del aprendizaje” para las distintas competencias que se deben desarrollar en comunicación, matemática, ciencia y ciudadanía.

Como perspectiva a futuro, se tiene previsto articular de manera eficiente los distintos documentos elaborados y enmarcarlos dentro de un documento que ahora se encuentra en construcción, denominado *Marco curricular*, en el cual se describirán los aprendizajes fundamentales. De esta manera ese documento, junto con los “Mapas de progreso” y las “Rutas de aprendizaje”, se constituirá en el sistema curricular orientador de los currículos regionales del Perú.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL PERÚ: SUS INICIOS

Fue a principios del siglo XIX que aparecieron personajes en el campo educativo peruano, tales como José A. Encinas y Manuel González Prada, entre otros, cuyo principal objetivo era la inclusión de la comunidad campesina rural del país en la educación (Ayzanoa, 2003: 65). Ellos entendían que la realización de los derechos y libertades del hombre debían darse a través de la educación y la cultura, así como la revalorización del maestro como eje central de todo proceso educativo.

En particular, en relación con la educación matemática, de acuerdo con Carranza (2007), en la década de 1960 los jóvenes José Tola Pasquel, Francisco Miró Quesada, Abel Fernández, Gerardo Ramos y José Reátegui crearon el Instituto para la Promoción de la Enseñanza de las Matemáticas (IPEM). Los objetivos de dicho instituto eran realizar cursos de perfeccionamiento de profesores de matemática de los diferentes niveles educativos, difundir conceptos e ideas didácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática; colaborar con la publicación de libros y auxiliar a los organismos nacionales para promover la enseñanza de las matemáticas.

Entre 1962 y 1968 el origen del IPEM estuvo asociado al del Instituto de Matemática de la Universidad de Ingeniería (IMUNI), dedicado a la investigación y a la formación de los líderes nacionales de la matemática. En ese grupo de investigadores preocupados por la educación matemática en el Perú destacó el Dr. César Carranza Saravia.

Debido a la fuerte influencia que recibieron los miembros del IMUNI del grupo Bourbaki, la concepción que primó entre sus integrantes fue la de la matemática moderna. Y esto vino acompañado de una concepción de la

educación matemática basada en una preparación formalista, caracterizada por el énfasis en la teoría dando origen a las posturas teorícista y tecnicista, según la clasificación de Gascón (2001).

El IMUNI programó las actividades conocidas como Institutos de verano, desarrolladas en diferentes universidades con varias semanas de duración y dirigidas a profesores de matemática de educación secundaria de Lima y provincias. En ellos impartían clases magistrales matemáticos peruanos y de otros países de Latinoamérica, y se presentaban los conceptos considerados como soporte de la estructura matemática: lógica, teoría de conjuntos, álgebra, topología, funciones, etcétera.

Una muestra de la repercusión que tuvo el trabajo realizado por este grupo de matemáticos fue que al finalizar el Cuarto Instituto de Verano se elaboró un plan de desarrollo futuro para la educación matemática en Latinoamérica. Al respecto, Carranza (2007) afirma que dicha actividad fue el inicio de una verdadera reforma de la enseñanza de la matemática en el continente americano. En aquellos casos en que se contó con el apoyo gubernamental para llevarla a cabo, como ocurrió en Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Uruguay, hoy se pueden observar los frutos de dichos cambios.

Sin embargo, en el contexto peruano, una crisis política en la década de 1970 determinó la desaparición del IMUNI, lo cual dio origen a una nueva etapa en el desarrollo de las matemáticas y la educación matemática peruana. Ésta tuvo como nuevo escenario a la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

En la década de 1980 es en este centro de estudios donde se crea la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, única en su género en el país y que responde al modelo educativo adoptado por la PUCP, orientado a la formación integral del individuo; ese modelo ha sido organizado tomando en cuenta los tres componentes esenciales de la universidad: formación, investigación y responsabilidad social.

El plan de estudios de esta maestría ha conocido varios cambios, con base en la visión que, en su momento, tenían las personas que la dirigían. Inicialmente el plan de estudios estaba formado, casi en su totalidad, por un conjunto de cursos de matemáticas puras, con un nivel de exigencia igual o menor al que tenían los estudiantes de una maestría en matemáticas y sólo había un curso de investigación al final del mismo. Esto se correspondía con una visión de los matemáticos de la época, que consideraba como condición suficiente para ser un buen profesor de matemáticas el hecho de saber ma-

temáticas. Y la justificación para este planteamiento se basó en que la formación de profesores que se brindaba en los institutos pedagógicos y en las facultades de educación de centros universitarios de la época se caracterizaba por brindar un gran número de cursos de pedagogía general, de psicología, y muy pocos de la disciplina matemáticas.

Sin embargo, en los últimos años se ha ido adoptando una visión antropológica de la matemática, de modo que esta se concibe como producto de la construcción humana, entendiendo que los ambientes de aprendizaje deben permitir desarrollar procesos de construcción, comunicación y validación de conocimientos matemáticos. Así, la última vez que se realizaron cambios importantes en el plan de estudios fue en el año 2006; a partir de esa fecha se adoptó una postura distinta sobre la didáctica de las matemáticas. Salazar y Gaita (2014: 86) explican que

A diferencia de lo que se buscaba en el plan de estudios anterior, en donde el objetivo era sólo que los profesores adquirieran sólidos conocimientos matemáticos y en el que se adoptaba una postura euclidianista respecto al saber matemático, en el plan actual, se ha adoptado una postura constructivista respecto a la matemática y su enseñanza [...] así, se propusieron como ejes fundamentales cursos de Matemáticas y espacios para que los estudiantes pudieran iniciarse en la investigación a través del estudio de marcos teóricos y metodológicos propios de la Educación Matemática. De esta manera, la maestría fue concebida como una maestría académica que buscaba generar conocimiento a partir del ya existente [...] Es así como, desde el año 2006, la maestría adoptó un nuevo rumbo y se empieza a tomar contacto con investigadores internacionales, artífices de esta nueva disciplina científica, para invitarlos a participar en algunas de las etapas del desarrollo de este renovado programa.

Esta postura se mantiene hasta la actualidad, con algunos ajustes realizados al interior de las asignaturas, pero sin que esto implique cambios de estructura. Actualmente el plan de estudios de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas tiene como fundamento una sólida formación disciplinar, que se complementa con la realización de investigaciones relevantes en el área de educación matemática. De esta manera, la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas se convierte en un punto de apoyo fundamental para la elaboración de propuestas para la enseñanza y la investigación de esa área.

Por otro lado, debemos señalar que uno de los principales responsables del desarrollo de la educación matemática en el Perú durante las últimas décadas ha sido el Dr. Uldarico Malaspina Jurado, fundador y director del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), con sede en la Pontificia Universidad Católica del Perú. El IREM es una red de institutos cuyos miembros son profesores de matemática de diferentes niveles educativos (primaria, secundaria y superior), y que trabajan tanto en la formación de maestros como en investigación en enseñanza de las matemáticas. En el caso del IREM-PUCP sus miembros son docentes-investigadores y exalumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

El aporte del Dr. Malaspina se ha plasmado en diversas publicaciones sobre resolución y creación de problemas (2013a; 2013b); en trabajos de investigación que han culminado como tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática; y en la realización de actividades de difusión como los Coloquios Internacionales sobre la Enseñanza de la Matemática. En ellos han participado destacados investigadores del área, entre ellos como Michele Artigue, Raymond Duval, Bruno D'Amore, Juan D. Godino, Vicenç Font, Miguel R. Wilhelmi, Patricia Camarena, Saddo Ag Almoloud, Maria José Ferreira da Silva y Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. La mayoría han impartido clases en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, codirigido tesis de maestría y establecido grupos conjuntos de investigación.

Se hace necesario señalar que en el Perú también existe la Sociedad Peruana de Educación Matemática (Sopemat), una asociación formada por educadores de la especialidad de matemática de los diferentes niveles del sistema educativo peruano, y que propicia espacios para la reflexión y difunde proyectos de innovación e investigación en el área. Entre sus objetivos está contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el Perú. Asimismo, esta sociedad es miembro de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática y participa en eventos nacionales e internacionales del área.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL PERÚ

Por lo descrito, podemos decir que la educación matemática peruana está pasando por una nueva etapa, ya que ese país hoy cuenta con un equipo de docentes y estudiantes formados en educación matemática, con un gran

potencial para desarrollar investigaciones en dicha área. Consideramos que tanto el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas como la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, representan espacios idóneos para la realización de investigaciones en educación matemática. Hasta el momento, en ambos centros se han considerado las siguientes áreas o líneas de investigación:

Uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría

Estudia la influencia del uso de la tecnología en la enseñanza de geometría en educación básica regular, así como el proceso de enseñanza y aprendizaje de temas de geometría con el uso de geometría dinámica (Cabri II plus, Cabri 3D, GeoGebra) en educación básica regular.

Algunos de los trabajos desarrollados en los últimos años en esta línea son los siguientes: La enseñanza de los sólidos geométricos basada en la teoría de Van Hiele con la incorporación de recursos informáticos para el primer año de educación secundaria (Beteta, 2009); Niveles de pensamiento alcanzados en situaciones didácticas relativas al concepto de semejanza de triángulos haciendo uso de la geometría dinámica (Gutiérrez, 2009); La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria (Fernández, 2013); La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería (Chumpitaz, 2013); Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria (García, 2014); El modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del GeoGebra (Santos, 2014), y Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos (Ríos, 2014).

Desarrollo del pensamiento numérico y algebraico

Estudia fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con las diferentes estructuras numéricas en la educación básica regular y fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con la variación: razones y proporciones, regla de tres simple, variación directa e inversamente proporcional, etc.; así como fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con pre-álgebra y álgebra.

Algunos de los trabajos realizados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios (Delgado, 2011); Análisis del tratamiento de álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización (Ricaldi, 2011); Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar *Matemática Quinto grado de Educación Primaria* (Carrillo, 2012); Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas (Neira, 2012); Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar (Morales, 2013); Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y la educación superior (Garcés, 2013), y Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes de primer año de secundaria (Medina, 2014).

Didáctica de la estadística y probabilidad

Contempla estudios sobre errores que presentan los alumnos de educación básica regular en relación con un determinado concepto estadístico o probabilístico, análisis de propuestas para la enseñanza de un determinado concepto estadístico o probabilístico, de modo que permitan el desarrollo del pensamiento inferencial o aleatorio.

Algunos de los trabajos realizados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior (Osorio, 2012); Significado de la Asimetría Estadística en los alumnos de Economía de la UNAC (Oviedo, 2013), y Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades (Sayritupac, 2014).

Análisis de organizaciones matemáticas y didácticas

Estudia el tratamiento de conceptos geométricos en textos de educación básica regular, concepciones erróneas de los estudiantes de ese mismo ciclo sobre el estudio de determinados conceptos geométricos y el diseño de

propuestas para la enseñanza de un determinado concepto geométrico en la educación básica.

Algunos de los trabajos elaborados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior (Carrillo, 2013); Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele (Maguiña, 2013), y Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario (Gonzales, 2014).

Creación y resolución de problemas

Se refiere al estudio de estrategias para estimular la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje, se brindan aportes de la creación de problemas en el aula para el aprendizaje significativo de un tema específico de matemáticas de EBR; se analizan las concepciones de profesores (de primaria o secundaria) sobre la creación de problemas de matemáticas, y el efecto de talleres de creación de problemas de matemáticas en las actitudes de profesores en formación y en servicio hacia las matemáticas.

Algunos de los trabajos desarrollados en los últimos años en esta línea son los siguientes: La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas: una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas (Núñez, 2012); Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales (Azañero, 2013), y Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas (Figuroa, 2013).

Además de esas líneas de trabajo, se formaron grupos de investigación que ahora realizan diversos proyectos de investigación.

GRUPOS Y PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

En el año 2011, por iniciativa de profesores-investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, se creó el grupo de estudios Tecnologías y Educación Matemática (TEM), que tiene como objetivo principal propiciar un espacio de discusión sobre la mediación de ambientes tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas; es decir, hacer sobre todo una reflexión teórica de algunos enfoques que cimentan el uso de la tecnología

informática en la clase de matemáticas, y cómo el buen uso de ésta trae como resultado otra manera de enseñar y aprender la matemática.

En ese contexto se desarrollaron algunas actividades de formación de profesores y reflexiones teóricas, como el primer seminario taller en el que participaron maestros de nivel secundario de colegios públicos y particulares de Lima. Con este seminario se dio un primer paso para el fortalecimiento de la línea de investigación acerca del uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría.

Asimismo, en el seminario se reflexionó de manera específica sobre el uso de los ambientes de geometría dinámica como el GeoGebra, Cabri II y Cabri 3D, porque estos ambientes pueden tornar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas –y de manera específica de la geometría– más dinámico, en tanto que disponen de diversas herramientas, funciones y recursos que permiten manipular representaciones de objetos geométricos (Salazar, 2011: 123). El seminario se realizó en dos etapas. En la primera se introdujeron algunas definiciones de tecnología y se hicieron actividades donde la tecnología informática puede facilitar o dificultar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la segunda etapa se presentaron diversas formas en que la tecnología informática puede ser utilizada desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas. Por fin se reflexionó sobre la importancia del buen uso de la tecnología informática en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Este seminario y otras actividades, por ejemplo los coloquios internacionales sobre enseñanza de las matemáticas –organizados cada dos años por el IREM-PUCP y la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, en los que participan investigadores, estudiantes de la maestría y profesores de los diferentes niveles educativos del país y del extranjero– son antecedentes para que en 2012 investigadores del IREM-PUCP pudieran crear el grupo de investigación sobre didáctica de las matemáticas (Dimat), que tiene entre sus objetivos: investigar los fenómenos didácticos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, tanto en la educación básica regular como en el nivel universitario; contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica regular y en la educación superior; articular la investigación que se realiza en el grupo con la que se hace en las tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; analizar, desde una perspectiva teórica y práctica, cuestiones referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuando

se utilizan ambientes tecnológicos. Como se observa, la formación de los grupos TEM y Dimat resultó fundamental para el avance de investigaciones en el área.

PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

Otro esfuerzo para fortalecer la investigación en educación matemática en el Perú son los proyectos de investigación que se llevan a cabo en el marco de las líneas de investigación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y del IREM-PUCP. Se presentan aquí algunos de ellos que se encuentran en pleno desarrollo.

En la línea de Didáctica de la estadística y la probabilidad, el proyecto “Logros de aprendizaje de los estudiantes del ciclo 4 y 6 de la educación básica regular en torno a los temas de estadística y probabilidad”, se encuadra en el nivel del conocimiento en estadística y probabilidad de estudiantes de ciclo 4 (cuarto año de educación primaria; los estudiantes tienen entre 9 y 10 años), y tiene como perspectiva conocer si los conocimientos básicos en ambos campos son alcanzados por los estudiantes en los momentos esperados. Para ello se utilizan los Estándares de Aprendizaje Nacionales de la Educación Básica Regular del Perú, considerando en particular los Mapas de progreso del aprendizaje.

Otro proyecto de esta línea de investigación es: “Fortalecimiento de los conocimientos básicos en profesores de primaria en ejercicio, según los contenidos considerados en el mapa de progreso de Estadística y Probabilidad”, que es la ampliación del proyecto anterior.

En cuanto a Creación y resolución de problemas, el proyecto trata sobre “La creación de problemas como competencia profesional del profesor de matemáticas: aportes para la formación de profesores”. Tiene como objetivo proponer un marco teórico sobre la creación de problemas de matemáticas que pueda ser integrado en la formación de profesores.

Una de las consecuencias concretas de este proyecto, por ejemplo, es presentar al Ministerio de Educación del Perú resultados de la investigación para que sean útiles a la formación de profesores y, por ende, a la formación de los estudiantes de educación básica regular del Perú.

En cuanto a la línea de investigación sobre Uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría, existen proyectos de investigación de ámbito internacional. A continuación los presentamos brevemente.

“Enseñanza y aprendizaje de matemáticas en ambientes de geometría dinámica empleando el GeoGebra”, desarrollado en el periodo 2013-2014, tuvo por objeto estudiar el efecto del uso de ambientes tecnológicos en el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello se propuso estrechar los vínculos ya existentes entre investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP e investigadores del grupo *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática* (PEA-Mat) de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUC-SP).

En este proyecto se toma como antecedente el hecho de que en nuestros días se tiene evidencia (Salazar *et al.*, 2012a, 2012b y 2013; Silva *et al.* 2012), de que el uso adecuado de ambientes tecnológicos, especialmente de geometría dinámica GeoGebra, Cabri II y Cabri 3D, facilitan la visualización y la percepción de propiedades de los objetos matemáticos representados, y que con otros recursos podrían no ser evidentes.

De manera específica, en el proyecto se plantea como objetivo analizar, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, cuestiones relacionadas con la complejidad de la inserción del ambiente de geometría dinámica GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica regular y, en el nivel universitario, en el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos. Se adoptaron como referencial teórico elementos de la teoría de registros de representación semiótica y aspectos relacionados con la visualización; también se consideran elementos de la teoría de situaciones didácticas y del enfoque instrumental. Como metodología de investigación se emplean aspectos de la ingeniería didáctica.

Se comunicaron los resultados obtenidos en el proyecto; es decir, mediante la publicación de tesis de maestría, así como de artículos que contienen los resultados de las investigaciones que se desprendan y cuyos autores sean profesores-investigadores y estudiantes. Además, los temas de investigación derivados de estos trabajos serán planteados como materia de futuras tesis de maestría. Así, se espera que este proyecto permita que estudiantes y profesores de la maestría fortalezcan su perfil de investigadores en esta línea.

El otro proyecto de la línea de investigación de uso de tecnologías trata de la interacción de investigadores de la PUCP y de la PUC-SP en investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos. Se encuentra en pleno desarrollo.

Este proyecto se realiza de forma colaborativa entre los grupos de investigación *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática* PEA-MAT y

Didáctica de las Matemáticas de ambas universidades, siendo el Dimat el que busca llevar a los profesores en formación inicial o continua al uso de ambientes tecnológicos y, especialmente, al empleo de ambientes de geometría dinámica. También espera que estos sirvan de instrumentos en la construcción de conjeturas y de resolución de problemas de matemática. Al igual que el proyecto anterior, aspectos de ingeniería didáctica de Artigue son utilizados como metodología de investigación. Además, se usarán entrevistas individuales e instrumentos diagnósticos; también serán ocupados cuestionarios semiestructurados, entrevistas y registro de producciones de los participantes, para identificar las concepciones de profesores de los dos países con relación con los conceptos matemáticos que se investiguen.

Luego, con el resultado del diagnóstico se definen los caminos para una propuesta y para el desarrollo de una formación continua de profesores, y a partir de ella se pretende que éstos construyan secuencias didácticas, las apliquen a sus estudiantes y analicen los resultados obtenidos.

USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA Y EN EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA: ALGUNAS INVESTIGACIONES

Además de los resultados de investigaciones de las tesis de maestría se han publicado artículos que enfatizan, sobre todo, el uso de ambientes de geometría dinámica –Cabri 3D y GeoGebra– en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría.

Estas investigaciones se justifican porque, según las Orientaciones para el Trabajo Pedagógico del Ministerio de Educación,

[...] la tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas, como un programa informático de “Geometría dinámica”, capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos (Perú, 2007: 30).

Es así que, desde 2011, investigadores del IREM-PUCP e investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas han publicado

resultados de sus trabajos, en los que utilizaron ambientes e geometría dinámica como el Cabri 3D y el GeoGebra; en foros como el VI y VII Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, ICME 12, VI IberoCabri, VIII CIBEM y RELME 28, entre otros congresos internacionales. Se presentan a continuación algunas de estas investigaciones.

La investigación de Salazar, Gaita y Beteta (2013) se desarrolló con estudiantes de nivel universitario en un primer curso de matemática, igualmente con la ayuda del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, y tuvo por finalidad iniciar el estudio de objetos elementales en la geometría analítica espacial. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular representaciones de objetos matemáticos como el punto, la recta, el plano y la esfera.

Las herramientas y recursos que posee este software permitieron, por ejemplo, ubicar puntos dadas sus coordenadas, identificar ecuaciones de planos paralelos y perpendiculares, además de determinar posiciones relativas entre ellos; asociar las ecuaciones a sus representaciones y hacer deducciones sobre las formas y las ecuaciones de sus intersecciones. Para el diseño de las situaciones se tomaron en cuenta los niveles de pensamiento geométrico según el enfoque de Parzysz.

Los resultados de esta investigación revelaron que las situaciones en que se utilizó el ambiente de geometría dinámica favorecieron la evolución de los niveles de pensamiento geométrico entre los estudiantes universitarios.

En cuanto a la investigación de Santos y Gaita (2014), ésta tuvo por objetivo determinar los niveles de comprensión de la circunferencia alcanzados por estudiantes del segundo año de secundaria (alumnos de 12 años de edad), con base en el modelo Van Hiele, y tomando en cuenta el tipo de justificación que realizan de acuerdo con los procedimientos matemáticos desarrollados. Se presentan actividades que relacionan los elementos de la circunferencia y han sido diseñadas considerando el software GeoGebra como mediador. Se planteó identificar el efecto del recurso tecnológico en relación con la adquisición de un nivel de aprendizaje superior, según el modelo adoptado.

La investigación de García y Salazar (2014) nace de la problemática que existe en la enseñanza de la geometría y su poca profundización en los temas del área, como las transformaciones en el plano, para centrarse en el estudio de la noción de simetría axial mediada por el software GeoGebra. Se toma como marco teórico y metodológico el enfoque instrumental y aspectos de ingeniería

didáctica, respectivamente. La investigación se realizó con estudiantes de 12 y 13 años de edad, quienes lograron utilizar algunas herramientas del software GeoGebra y reconocer las propiedades de una figura simétrica.

Por último, en la investigación de Masgo y Salazar (2014) se analiza una secuencia de actividades bajo el supuesto que el uso del software GeoGebra favorece el aprendizaje de la noción de semejanza de triángulos en estudiantes de Educación Básica Regular del Perú (14 y 15 años de edad). En las actividades que se desarrollaron en la investigación se deseaba determinar las fases por las que pueden transitar los estudiantes cuando construyen los criterios de semejanza de triángulos según la dialéctica herramienta-objeto de Douady. También se tomaron en cuenta aspectos básicos de la teoría de registros de representación semiótica de Duval. Además, se utilizaron aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue como base metodológica. Como uno de los resultados se observó que los estudiantes fueron capaces de construir los criterios de semejanza de triángulos al movilizar sus conocimientos previos y lograron desarrollar la secuencia de actividades en la que utilizaron GeoGebra como herramienta tecnológica.

REFLEXIONES FINALES

La creación de grupos de estudio y de investigación en educación matemática, de líneas de investigación tanto del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas como de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, el desarrollo de proyectos de investigación que tienen como productos tesis de maestría y publicaciones en revistas, congresos internacionales, etc., permite afirmar que la investigación en educación matemática en el Perú está en pleno desarrollo y en proceso de consolidación.

REFERENCIAS

- Ayzanoa, G. (2003). *Grandes Educadores Peruanos: libro dedicado a los maestros del Perú en su día*. Lima: Editorial del Ministerio de Educación del Perú.
- Azañero, M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

- Beteta, M. (2009). *La enseñanza de los sólidos geométricos basada en la teoría de Van Hiele con la incorporación de recursos informáticos para el primer año de educación secundaria*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Carranza, C. (2007). *Historia de la matemática peruana*. En: Ciclo de conferencias sobre Matemática y Física Educativa. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Carrillo, M. (2012). *Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Chumpitaz, D. (2013). *La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Delgado, A. (2011). *Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Fernández, M. (2013). *La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Figuroa, R. (2013). *Resolución de Problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Garcés, W. (2013). *Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y la educación superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- García, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- García, D. y Salazar, J. V. F. (2014). *La instrumentación de la simetría axial mediada por el GeoGebra*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 129-160.

- Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Gutiérrez, W. (2009). *Niveles de pensamiento alcanzados en situaciones didácticas relativas al concepto de semejanza de triángulos haciendo uso de la geometría dinámica*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Higginson, W. (1980). *On the foundations of Mathematics Education. For the Learning of Mathematics* 1(2), 3-7.
- Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros Basada en el modelo Van Hiele*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Malaspina, U. (2013a). Creación de problemas. Un caso con probabilidades. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 33, 119-124.
- Malaspina, U. (2013b). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41-49.
- Masgo, L. y Salazar, J. V. F. (2014). *Semejanza de triángulos mediada por el GeoGebra*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.
- Medina, F. (2014). *Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes de primer año de secundaria*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Ministerio de Educación (2007). *Orientaciones para el trabajo pedagógico*. Lima: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Disponible en: <http://www.minedu.gob.pe/>
- Morales, Z. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Núñez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

- Oviedo, S. (2013). *Significado de la asimetría estadística en los alumnos de economía de la UNAC*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Piscoya, L. H. (2005). *Cuánto saben nuestros maestros. Una entrada a los diez problemas cardinales de la educación peruana*. Lima: Fondo Editorial de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Ramírez, T. (2006). *Cómo hacer un proyecto de investigación*. Caracas: Editorial Júpiter.
- Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento de álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (eds.). *Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las áreas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Ríos, J. C. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Sayritupac, J. (2014). *Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Salazar, J. V. F. y Gaita, R. C. (2014). Situación actual de la educación matemática en el Perú. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura* 9(15), 82-95.
- Salazar, J. V. F. y Almeida, T. C. S. (2011). *Geometria dinâmica: um caminho para o estudo de Geometria*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.
- Salazar, J. V. F.; Malaspina, U.; Gaita, R. C. y Ugarte, F. (2012a). *Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis*. En: 12th International Congress on Mathematical Education. Seúl.
- Salazar, J. V. F.; Gaita, R. C.; Malaspina, U. y Ugarte, F. (2012b). *The Use of Technology and Teacher Training: An Alternative for the Teaching of Spatial Geometry*. 12th International Congress on Mathematical Education. Seúl.
- Salazar, J. V. F.; Chumpitaz, L. D. (2013). *Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos*. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Uruguay: Montevideo.
- Salazar, J. V. F.; Gaita, R. C. y Beteta, M. (2013). *Introducción a la Geometría Analítica Espacial con Cabri 3D*. VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Perú: Lima.
- Santos, E. (2014). *El modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del GeoGebra*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

- Santos, E. y Gaita, R. C. (2014). *Niveles de comprensión del concepto circunferencia mediado por el GeoGebra*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.
- Silva, M. J. y Salazar, J. V. F. (2012). *Cabri 3D na sala de aula*. VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Perú: Lima.