La educación matemática en el siglo XXI

La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz / Patricia Camarena Gallardo
COORDINADORES

COLECCIÓN PAIDEIA SIGLO XXI

La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz y Patricia Camarena Gallardo, coordinadores

Primera edición 2015

Av. Luis Enrique Erro s/n
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco,
Del. Gustavo A. Madero, C. P. 07738, México, D. F.

Libro formato pdf elaborado por:
Coordinación Editorial de la Secretaría Académica
Secretaría Académica, 1er. Piso,
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"
Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738

Diseño y formación: Quinta del Agua Ediciones, S.A. de C.V. Cuidado de la edición: Héctor Siever

ISBN: 978-607-414-497-0

Impreso en México / Printed in Mexico

Índice

Una nota de agradecimiento 9

Introducción. Matemática, futuro e imaginación 11
Xicoténcatl Martínez Ruiz

BRASIL
Educación matemática en Brasil: proyectos y propósitos 19
Maria Salett Biembengut

CHILE
Una visión acerca de la educación matemática en Chile: cómo caracterizar su presente, los principales hitos del proceso de llegar allí y cómo pensar el futuro 41
Fidel Oteiza Morra

COSTA RICA
Costa Rica: una reforma radical en la educación matemática 67
Ángel Ruiz

ESPAÑA
La educación matemática en España 99
José Luis Lupiáñez, Luis Rico Romero, Isidoro Segovia y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo

MÉXICO
Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI 133
Manuel Santos Trigo

El aprendizaje de la geometría en el siglo XXI: tres teoremas básicos sobre la línea recta y su demostración 155
Mario García Juárez

Educación matemática en México: investigación y práctica docente 191
Patricia Camarena Gallardo

2036: una filosofía prospectiva de la educación matemática 217
Xicoténcatl Martínez Ruiz

La toma de decisiones durante una clase de matemáticas 233
Miguel Ángel Parra Álvarez

PERÚ
Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas 257
Jesús Victoria Flores Salazar y Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

PUERTO RICO
Una aproximación a la matemática educativa en Puerto Rico 279
Orlando Planchart Márquez

VENEZUELA
Perspectivas de la educación matemática en Venezuela para el siglo XXI 297
Yolanda Serres

CONCLUSIONES
La educación matemática en el siglo XXI: conclusiones del presente y futuro 319
Patricia Camarena Gallardo

Acerca de los autores 342

Acerca de los profesores entrevistados 349

México

Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI[1]

Manuel Santos Trigo
Departamento de Matemática Educativa,
Cinvestav-IPN

El amplio desarrollo y disponibilidad de diversas tecnologías digitales plantean retos importantes a los sistemas de educación relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza se deben considerar en el aprendizaje. En este capítulo, se destaca la idea de problematizar los contenidos como un eje para organizar y estructurar el conocimiento y uso coordinado de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas. Se argumenta la necesidad de que los estudiantes desarrollen una cultura digital donde se valore el trabajo en equipo y la práctica de una reflexión matemática continua que los lleve a engancharse en procesos de resolución de problemas.

Introducción

El desarrollo constante y uso de tecnologías digitales permean muchas de las actividades que los individuos realizan en su quehacer cotidiano. Los dispositivos móviles, como las tabletas o los teléfonos inteligentes, son vehículos no sólo para interactuar entre individuos, sino también para buscar información en línea, comprar algún producto o para realizar una consulta médica. ¿Cuáles son los retos importantes que las instituciones deben afrontar para promo-

[1] Este capítulo corresponde a las actividades que se desarrollan en el proyecto "Fundamentos teóricos en el desarrollo y reconstrucción del conocimiento matemático en ambientes que promueven el empleo de varias herramientas digitales" financiado por el Conacyt-168543.

ver el aprendizaje de los estudiantes que considere los cambios culturales y sociales que se desarrollan en el contexto mundial? Hoy en día el uso de un dispositivo móvil abre oportunidades a particulares de obtener recursos al ofrecer servicios como rentar una habitación en su casa o compartir un vehículo. Schmidt y Cohen (2013) describen las maneras en que la tecnología incidirá en las actividades y tareas de los individuos en un futuro próximo. Afirman que una casa o apartamento será una orquesta con varios dispositivos digitales donde el individuo que la habita será el conductor. Ya sea con gestos o con el habla directa, ese individuo dará las instrucciones para controlar la temperatura, la humedad, las luces o la música del ambiente. El sistema central automatizado estará programado para enviar señales a los robots encargados de las tareas de limpieza y mantenimiento del lugar. Incluyendo un recordatorio al individuo sobre la despensa que se debe comprar y los lugares para adquirirla a mejor precio. Además, algún dispositivo le mostrará en un monitor, visible en la sala o la cocina, las actividades que el individuo tiene planeadas para el día o la semana. También tendrá información disponible sobre su presión sanguínea, lípidos o nivel de glucosa de manera inmediata; y en caso de tener un accidente, como tropezarse con un objeto al ir a la cocina, el individuo recurrir de inmediato a su teléfono para abrir la aplicación "Diagnóstico", que escanea el golpe y le indicará si existe fractura, qué hacer o con quién acudir en caso necesario. Al salir del apartamento, para llevarlo al trabajo u oficina lo esperará un auto sin conductor, que lo transportará al lugar de la reunión programada para ese día…

Este escenario resumido da cuenta del tipo de actividades que las tecnologías digitales pondrán realizar y que, en consecuencia, generarán una manera distinta de interactuar en la sociedad. Así, se vislumbra una transformación en las formas de realizar tareas rutinarias y una necesidad por ajustar las estructuras de las instituciones encargadas de la formación académica y cultural de los individuos. En términos generales, el uso sistemático y coordinado de diferentes tecnologías debe ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de pensar que resulten importantes en la formulación de preguntas y la resolución de problemas.

En este capítulo se identifican algunos principios alrededor de una propuesta que oriente la construcción del conocimiento de los estudiantes a partir el uso coordinado de herramientas digitales. Se destacan las formas de pensar, los conocimientos y habilidades que los alumnos deben desarrollar para estar en posición no sólo de construir una cultura amplia en disciplinas científicas, sino también identificar escenarios de aprendizaje donde la tecnología digital contribuya en la construcción de ese conocimiento. Así, la meta es que los estudiantes desarrollen competencias para resolver no sólo los problemas que se enfrentan en un ambiente escolar, sino aquéllos que aparecen fuera de la escuela.

Cambios en la educación matemática

Una sociedad con cambios notables y con desarrollos tecnológicos disponibles demanda ajustes significativos en los sistemas de educación. Por ejemplo, algunas instituciones reconocidas en el ámbito internacional han puesto en línea algunos programas y cursos que antes se impartían de manera presencial. Además, un estudiante ahora consulta fuentes en línea en su quehacer cotidiano cuando quiere resolver un problema o comprender algún concepto. ¿Qué acciones se deben considerar en la restructuración de un sistema educativo que incorpore de manera sistemática el empleo coordinado de tecnología digital en la formación del individuo? ¿Qué hacer para que los individuos participen en el diseño de tecnologías importantes para el desarrollo del conocimiento, producción de alimentos, equipos médicos y medios de transporte o comodidades? ¿Qué tipo de educación debe recibir un niño o individuo para que al término de sus estudios participe en la generación de conocimiento y tecnologías y en la resolución de problemas? Siempre conlleva un riesgo plantear conjeturas sobre qué será vital en la sociedad y en el ámbito laboral dentro de 16 años, cuando ese niño que hoy inicia su educación elemental obtenga el título de abogado o ingeniero; sin embargo, cabría preguntar si aún serán trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias; si habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras, o un álgebra con menos énfasis en las operaciones y cálculos algebraicos. ¿Seguirá siendo cardinal que el niño en la primaria haga planas y planas para aprender a escribir, o será mejor introducirlo en el uso de computadoras y tabletas que lo ayuden a desarrollar o presentar un argumento estructurado y comprender lo que lee? ¿Desaparecerá el modelo de enseñanza donde, en general, un profesor promueve actividades de aprendizaje en un ambiente controlado? ¿Deben considerarse ya escenarios de enseñanza donde el estudiante pueda por sí mismo diseñar un menú de aprendizaje, en el cual se incluya una interacción en línea con otros estudiantes y asesores? La discusión de estas preguntas implica analizar el tipo de conocimientos, habilidades y formas de pensar que la educación formal debe promover a través de las instituciones. Es decir, los sistemas de educación deben ser sensibles a los avances de la ciencia y la tecnología, en términos de ajustar constantemente los modelos de formación y promoción de la educación de los individuos. Los desarrollos tecnológicos demandan ajustes o cambios en los sistemas de educación acerca de los contenidos que los estudiantes deben aprender, y sobre las formas de organizar y estructurar los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes construyan esos contenidos. Hoy en día es muy común leer que empresas internacionales en distintos ramos contratan a su personal a partir de interrogarlos sobre cómo formularían una pregunta relacionada con el área de la empresa y sobre las posibles formas de responderla. Es decir, les interesa conocer la forma de pensar que manifiesten los individuos, así como las decisiones adoptadas en los procesos para representar y explorar diversos problemas. Resulta menos importante que los individuos muestren un dominio aislado de conocimientos disciplinarios.

En esta perspectiva, los estudiantes en su formación académica deben construir y desarrollar conocimiento, estrategias y habilidades necesarias que les permitan participar en los procesos de formulación e identificación de problemas y en la búsqueda de diferentes maneras de resolverlos. En los procesos de resolución, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales demanda que los estudiantes:

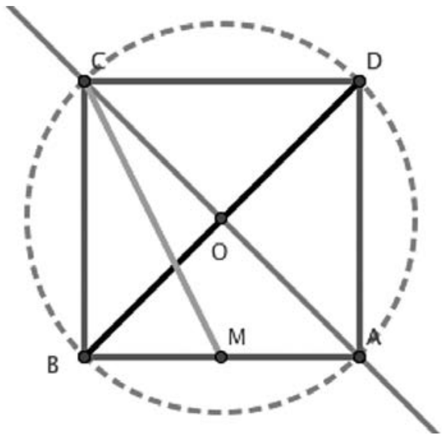
1. Busquen información relacionada con los temas de estudio en diferentes medios, lo cual incluye libros digitales y sitios e línea. En esta búsqueda los estudiantes deben utilizar métodos y estrategias que les permitan sintetizar, analizar y contrastar diferentes tipos de información.
2. Aprendan a trabajar en grupo o equipo, para aprender a escuchar otros puntos de vista, discutir y compartir ideas y soluciones.
3. Desarrollen constantemente nuevas herramientas que les permitan representar y explorar diversos problemas, incluyendo las representaciones dinámicas.
4. Desarrollen y practiquen diferentes maneras de planificar, monitorear y evaluar los procesos de resolución de problemas.
5. Representen y discutan resultados intermedios y finales que puedan ser accesibles a colegas y público en general.

6. Generen resultados que sean compartidos y utilizados por una comunidad amplia.
7. Se involucren en actividades que fomenten la creatividad en la resolución de problemas. Un aspecto fundamental en el desarrollo de las ciencia es buscar diferentes maneras de resolver un problema. La creatividad se desarrolla a partir de analizarlo desde caminos no convencionales, y los estudiantes deben siempre buscar métodos originales o formas novedosas de abordarlo.
8. Construyan y expresen valores y principios éticos. El conocimiento disciplinar se desarrolla dentro de una comunidad donde sus integrantes constantemente dialogan, escuchan y manifiestan respeto por las contribuciones e ideas de los demás. Así, el respeto a las diferencias y el desarrollo de responsabilidades civiles debe ser parte de la formación de todos.

Problematizar el conocimiento

Un aspecto central, el cual enmarca las formas de pensar que los estudiantes deben desarrollar y expresar en la comprensión de ideas matemáticas y la resolución de problemas, es concebir y conceptualizar a la disciplina como un conjunto de dilemas o preguntas que necesitan resolver con recursos, conceptos y estrategias matemáticas (Santos-Trigo, 2014a). Es decir, las situaciones o tareas matemáticas representan oportunidades para que el estudiante participe y se enganche en un proceso de cuestionamiento, de búsqueda de relaciones, de reflexión conceptual, más que sólo seguir y aplicar un conjunto de procedimientos. En este camino los estudiantes utilizan el conocimiento y las habilidades previamente construidas para discutir el sentido de los problemas, usar distintas representaciones para explorarlos, formular relaciones y conjeturas, buscar diversos argumentos para sustentarlas y, eventualmente, comunicar resultados. Por ejemplo, un objeto que se estudia desde la educación elemental es el cuadrado. ¿Cómo problematizar el estudio de esta figura?, ¿cómo pueden los estudiantes enfocar la atención hacia las propiedades de este objeto, de tal manera que sean una fuente para buscar relaciones entre sus atributos y elementos? En esta perspectiva, un estudiante puede comenzar preguntándose sobre las distintas maneras de construir un cuadrado a partir de conocer uno de sus lados o una de sus diagonales. La figura 1 muestra la construcción de un cuadrado girando 90° el segmento dado tres veces con respecto a uno de sus extremos. En la misma figura, el cuadrado se puede construir a partir de una de sus diagonales. En este caso se traza la mediatriz de BD, un círculo con centro O y radio OB, y las intersecciones del círculo con la mediatriz determinan los otros dos vértices del cuadrado.

Figura 1. Trazo de un cuadrado a partir de un lado dado o una diagonal.



En relación con la misma figura se puede plantear la siguiente pregunta: ¿se puede construir un cuadrado si conocemos uno de sus vértices (C) y el punto medio (M) de uno de sus lados, que no es contiguo al vértice dado? La figura 2 muestra un modelo dinámico que involucra inicialmente la generación de una familia de rectángulos con vértice en el punto A y M como punto medio de un lado no contiguo.

Con la ayuda de GeoGebra se determinan los lugares geométricos de los puntos N y C, respectivamente, y la intersección de estos representa el vértice C' del cuadrado que se pide construir. A partir del vértice C' y el punto medio M se construye el cuadrado C'B'AD' (figura 3).

Otra manera de construir el cuadrado involucra identificar relaciones a partir de asumir que el problema está resuelto. Con base en la figura 4 (asumiendo la solución) se identifican algunas relaciones que nos llevan a obtener la medida del ángulo QPM. Esto es, se observa que Q está en el círculo c

Figura 2. Trazo de una familia de rectángulos al mover el punto P alrededor de la circunferencia *c*.

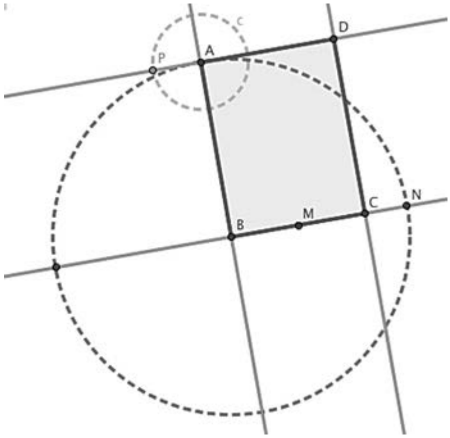
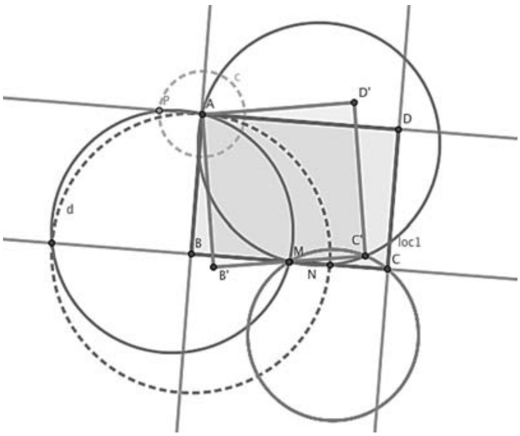


Figura 3. Construcción del cuadrado a partir de los lugares geométricos de los puntos C y N cuando se mueve el punto P sobre la circunferencia *c*.



y el ángulo PQM es recto, con un cateto *s* y otro *s*/2. Con esta información se tiene:

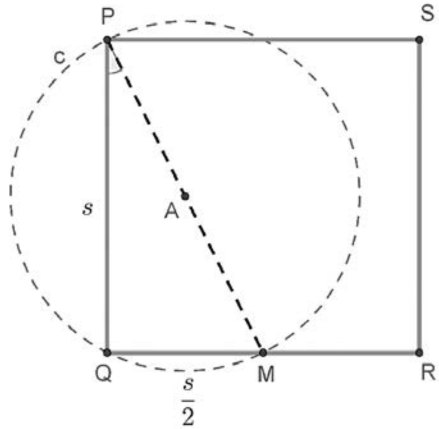
$$\tan(\angle QPM) = \frac{s/2}{S} = \frac{1}{2},$$

por tanto,

$$\angle QPM = \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

En consecuencia, para construir el cuadrado se identifica el punto medio del segmento PM, se traza el círculo de centro en A y radio AP, y se gira el segmento PM un ángulo de medida arctan(1/2). La intersección del segmento rotado con el círculo determina el vértice Q, y con esos datos se construye el cuadrado PQRS.

Figure 4. Búsqueda de relaciones para construir el cuadrado



En términos generales, las actividades y experiencias de los estudiantes se deben enfocar a la construcción de preguntas que demandan un argumento o justificación y *no* aquéllas que puedan responderse de manera positiva o negativa; ni mediante el mero uso de información cuantitativa. Las respuestas a estas últimas ya existen y pueden consultarse en Internet. En el ejemplo del cuadrado, el mismo objeto resulta una fuente de preguntas que se responden vía un argumento. ¿Por qué en la geometría del plano, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°? ¿Por qué los elefantes son más longevos que los seres humanos? O bien preguntas que impliquen la búsqueda de un método para representar un fenómeno o diseñar un instrumento: ¿cómo puedo utilizar el poder de las herramientas digitales (teléfonos inteligentes, internet, enciclopedias en línea, etc.) para aprender matemáticas, física o biología? ¿Cómo construir un artefacto o aplicación que pueda dar cuenta del ritmo cardiaco, la respiración y la química sanguínea de un individuo desde un teléfono móvil? ¿Puedo construir un cuadrado si conozco su centro y uno de sus vértices? Este tipo de preguntas conducen a la búsqueda de información, al planteamiento de algunas hipótesis o conjeturas y formas de probarlas o refutarlas.

La resolución de problemas y al aprendizaje de las matemáticas

Aprender matemáticas requiere problematizar o cuestionar tareas y situaciones, pensar distintas maneras de comprender o resolver un problema, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2014a). Implica que el estudiante desarrolle una disposición favorable hacia el estudio de la disciplina que le permita cuestionarse sobre las tareas propuestas, dar sentido a sus respuestas, explorar preguntas y desarrollar una comprensión matemática como parte de una comunidad de aprendizaje que valore y aprecie el trabajo individual y de colaboración. Es decir, aprender matemáticas requiere crear la necesidad de reflexionar de manera constante sobre el mismo proceso de construcción del conocimiento. Además, el proceso de resolver problemas o comprender un concepto matemático involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar y refinar sus ideas y métodos de solución.

En este periodo de análisis y reflexión acerca de los problemas que pueden guiar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento profundo de las matemáticas, se plantea la necesidad e importancia de centrar la atención en el uso de problemas no rutinarios para conseguir un aprendizaje robusto y más efectivo de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes. Se trata de problemas cognitivamente no triviales; es decir, el estudiante o el profesor no conocen de antemano un método de solución (Selden, Selden y Mason, 1994: 19).

Selden, Selden y Mason (1994) señalan que un grupo de estudiantes universitarios, que habían cursado satisfactoriamente un curso de Cálculo, mostraron serias dificultades al resolver problemas no rutinarios. Es decir, aun cuando los estudiantes habían estudiado recientemente los contenidos necesarios que les colocaban en disposición de resolver los problemas, la mayoría no identificó que los conceptos de Cálculo estudiados eran suficientes para responder las preguntas. Un ejemplo era el siguiente:

¿Tiene $x^{21}+x^{19}-x^{-1}+2=0$ alguna raíz entre −1 y 0? ¿Por qué?

En este ejemplo bastaba con analizar la monotonía de la gráfica de la función asociada al polinomio en el intervalo [−1, 0). Al obtener la derivada de la función asociada, se observa que será mayor que cero en todo su dominio de existencia, y en particular en el intervalo considerado, lo cual indica que la función siempre es estrictamente creciente, y por ello al evaluarla en $x = -1$ el valor de la función en dicho punto será 1, y por tanto no corta el eje OX. Para seguir todo este razonamiento, no es suficiente conocer o disponer de una serie de recursos matemáticos, también se debe saber cuándo y cómo utilizarlos. ¿Cuál es el papel de los ejercicios o problemas rutinarios en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes? Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) proponen un marco sobre cómo transformar un ejercicio o problema rutinario en un conjunto de actividades que demandan una reflexión de carácter matemático por parte de los estudiantes. Así se destacan fases importantes, donde los alumnos plantean de modo constante preguntas relacionadas con la comprensión de los enunciados y conceptos, la búsqueda de información relacionada, el uso de tecnología digital, la búsqueda de diferentes métodos de solución y la comunicación de resultados. En particular, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales ofrece a los estudiantes distintas oportunidades para representar y explorar conceptos e ideas matemáticas desde varios ángulos o perspectivas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

I. Comprensión de un problema, concepto, definición o procedimiento matemático. ¿Qué objetos matemáticos están involucrados? ¿Cuáles son los conceptos o elementos claves? ¿Qué datos se proporcionan? ¿Cuál es la tarea o qué se pide? ¿Existe información suficiente o tiene sentido el enunciado?

¿Tiene sentido la pregunta o lo que se pide en el problema? ¿Las unidades que se utilizan en los datos son consistentes? ¿Se puede expresar el enunciado de otras maneras? ¿Cómo se plantea el enunciado de un problema?

a) El papel del contexto: ¿qué tipos de contexto? Matemático, realista, artificial.

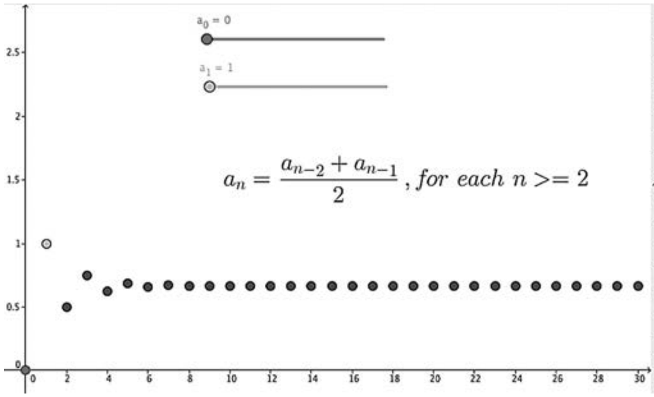
b) Formulación de problemas: oportunidades para que los mismos estudiantes propongan problemas o preguntas.

Uso de YouTube o alguna configuración dinámica. Por ejemplo, en la figura 5 se puede explorar el comportamiento de la sucesión

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$$

para distintos valores de $n \geq 2$ (http://www.geogebratube.org/student/m139246).

Figura 5. Modelo dinámico para explorar la sucesión a_n.



	A	B
1	0	0
2	1	1
3	2	0.5
4	3	0.75
5	4	0.625
6	5	0.6875
7	6	0.65625
8	7	0.671875
9	8	0.6640625
10	9	0.66796875
11	10	0.666015625
12	11	0.6669921875
13	12	0.6665039063
14	13	0.6667480469
15	14	0.6666259766
16	15	0.6666870117
17	16	0.6666564941
18	17	0.6666717529
19	18	0.6666641235
20	19	0.6666679382

Acciones. Leer el problema y discutir en pareja o grupos de tres el significado del enunciado. Utilizar alguna herramienta para hacer una representación geométrica del problema.

II. Ideas, conceptos, recursos asociados con el problema o tarea. ¿Qué información, teoremas, relaciones o resultados matemáticos se conocen sobre el tema?

¿Qué otros conceptos y relaciones se identifican cuando se construyen objetos auxiliares en la representación del problema? ¿Qué recursos en línea puedo consultar para buscar información sobre el o los temas involucrados? ¿Existe algún video donde se expliquen los conceptos?

Uso de enciclopedias en línea o sitios como Khan Academy.

Acciones. Hacer una lista de los términos y conceptos que aparecen en el enunciado. Compararla con la lista de otros estudiantes y buscar información en línea o libros de texto que permitan ampliar la lista inicial.

III. Un plan de solución y su implementación. ¿Cómo se puede utilizar o integrar la información y resultados relacionados con el problema en el diseño de un plan de solución? ¿Existen diferentes maneras de resolver el problema o explicar un concepto? ¿Se puede construir y explorar un acercamiento dinámico del problema?

¿Qué información se obtiene al relajar las condiciones del problema o considerar casos particulares? ¿Cómo se construye un modelo dinámico del problema? ¿Qué conjeturas se pueden visualizar?

¿Qué información o datos son importantes en la construcción de un modelo algebraico del problema? ¿Tiene sentido la solución que se obtiene del problema? ¿Cómo se fundamenta y comunica la solución del problema?

¿Todos los acercamientos sustentan la misma solución?

Uso de GeoGebra, WolframAlpha.

Acciones. Trabajo individual, en pareja o equipo en la creación de distintas estrategias para resolver el problema.

IV. Análisis y contrastación de los distintos caminos para resolver el problema. ¿Qué formas de razonamiento se involucraron? ¿Qué estrategias y recursos se utilizaron en cada uno de los acercamientos? ¿Qué conceptos se usaron en cada acercamiento o solución del problema? ¿Se utilizó toda la información dada al resolver el problema? ¿Cómo se sustentó la solución?

Acciones. Revisar y discutir en grupo las maneras de razonar que llevaron a la solución del problema. Identificar los conceptos y estrategias heurísticas importantes en el proceso de solución.

V. Extensión y formulación de nuevos problemas. ¿Se puede generalizar el problema? ¿Los métodos de solución se pueden aplicar a otras familias de problemas? ¿A partir de los conceptos involucrados, qué otros problemas se pueden formular?

a. Problemas que se resuelvan con el mismo método.
b. Proporcionar información o datos y de ahí plantear un problema.

Acciones. Discusión de la generalidad de los métodos de solución. Proponer una lista de nuevos problemas.

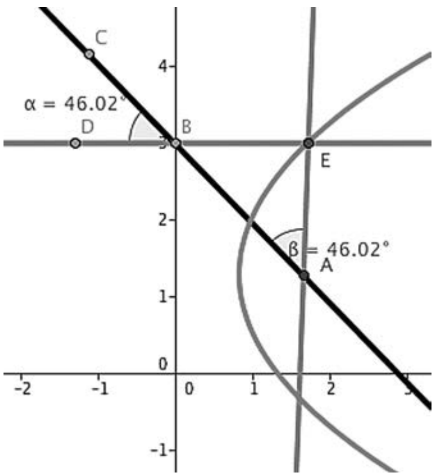
Las fases en la resolución de problemas involucran el uso coordinado de tecnología digital. Así, un aspecto esencial es el desarrollo de materiales que incorporen lectores de libros interactivos con audio, videos y animaciones útiles en la representación y exploración de los problemas. Roschelle *et al*. (2013: 36) afirma que "la meta en el diseño de los nuevos textos digitales debe ser guiar y promover una relación más activa entre el lector y el texto que le permita el desarrollo de habilidades y estrategias para engancharse productivamente en el estudio de ideas fundamentales de las matemáticas". De la misma manera, Camarena (2014) propone un modelo para el diseño de material interactivo que oriente a los estudiantes en la construcción de conocimiento matemático.

Competencia digital

Un tema insoslayable es que el Estado construya una infraestructura eficiente que permita a los individuos desarrollar una cultura digital amplia. Es decir, así como la alfabetización de todos los individuos se reconoce como una competencia que todos deben desarrollar –pues les permite construir, ampliar y utilizar habilidades cognitivas asociadas con la comprensión de lectura y aritmética básica en la resolución de problemas–, la *alfabetización* o cultura digital de todos los individuos resulta indispensable no sólo en los procesos de identificar dilemas o problemas disciplinarios, sino también en la búsqueda de información, representación, exploración, solución de problema y comunicación de resultados.

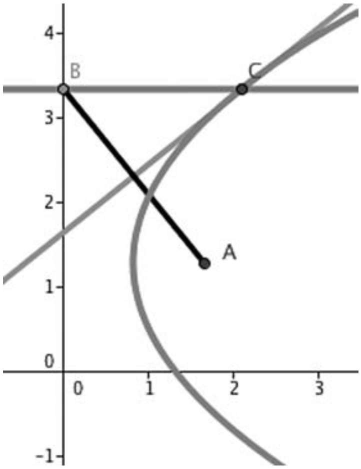
La competencia digital se refiere a que los estudiantes desarrollen recursos y habilidades en el uso de tecnología digital en la resolución de problemas. El término tecnología digital comprende aquellas con propósitos múltiples: pizarrones interactivos, el uso de Power Point, tecnologías para comunicación (Skype, Facebook, etc.) o Internet; pero también las diseñadas para realizar tareas matemáticas, como los sistemas de geometría dinámica (GeoGebra), WolframAlpha, o Sistemas de Álgebra Computacional. Ambos tipos de tecnología pueden contribuir en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Así, profesores y alumnos deben conocer el potencial de estas herramientas en los procesos de resolución de problemas. Mishra & Koehler (2006) afirman que los maestros de matemáticas deben analizar y discutir las transformaciones y cambios del contenido matemático como resultado de que los estudiantes usen de manera consistente la tecnología digital en sus experiencias de aprendizaje. En este contexto, Santos-Trigo y Ortega-Moreno (2013) presentan un modelo dinámico para un problema clásico presente en los cursos de geometría analítica: *¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y el eje Y?* El modelo ilustra la construcción de todas las cónicas a partir del movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica. Su construcción involucra representar el punto fijo A y seleccionar un punto B sobre el eje Y desde el cual se traza la perpendicular al mismo eje. También se traza la recta AB. La rectas AB y BE forman un ángulo DBC. Con la herramienta se rota la recta AB la medida del ángulo DBC alrededor el punto A. Esta recta interseca a la recta DB en E. Así el triángulo BEA es isósceles. El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola (figura 6).

Figura 6. El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola.



Otra manera de abordar este problema es trazando la mediatriz del segmento AB que interseca a la recta perpendicular al eje Y que pasa por B en el punto C. El lugar geométrico del punto C cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es la parábola (figura 7).

Figura 7. El lugar geométrico del punto C es un parábola.



Con la herramienta se puede construir un caso general donde se consideren la razón de la distancia de los puntos del lugar geométrico al punto fijo y a una recta cualquiera dada distinta de la unidad. La figura 8 muestra la construcción dinámica donde

$$\frac{d(SP)}{d(PM)} = k$$

En la representación y exploración dinámica del problema se observa que la construcción del modelo se basa en interpretar geométricamente el concepto de perpendicularidad y la razón constante que involucra las distancias entre un punto del lugar geométrico y el punto fijo, y la que existe entre ese punto del lugar y una recta fija. El arrastre y movimiento controlado de objetos dentro del modelo son estrategias esenciales en la búsqueda y detección de invariantes o patrones o relaciones. Además, el movimiento

Figura 8. Modelo dinámico que generaliza la construcción de las secciones cónicas.

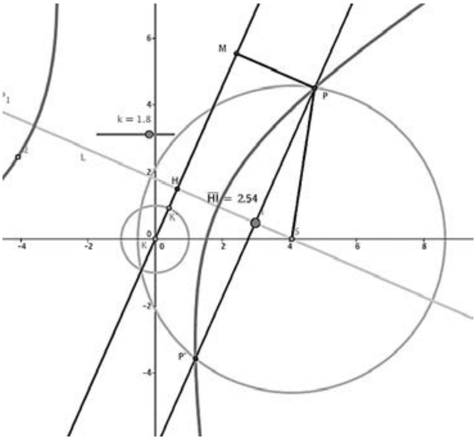
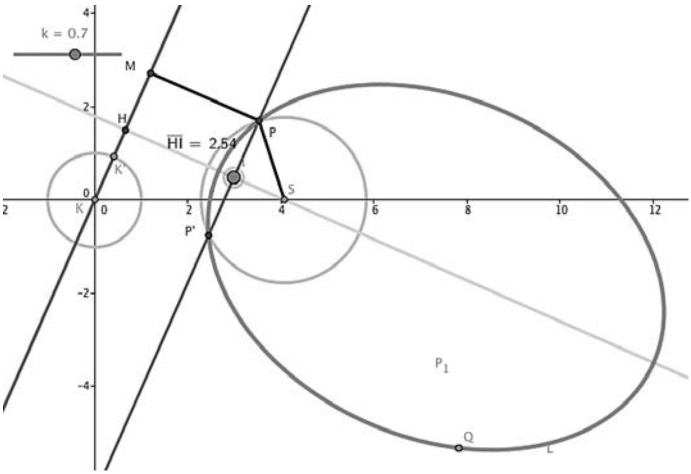


Figura 9. Para valores de k menores de 1 se obtienen elipses.



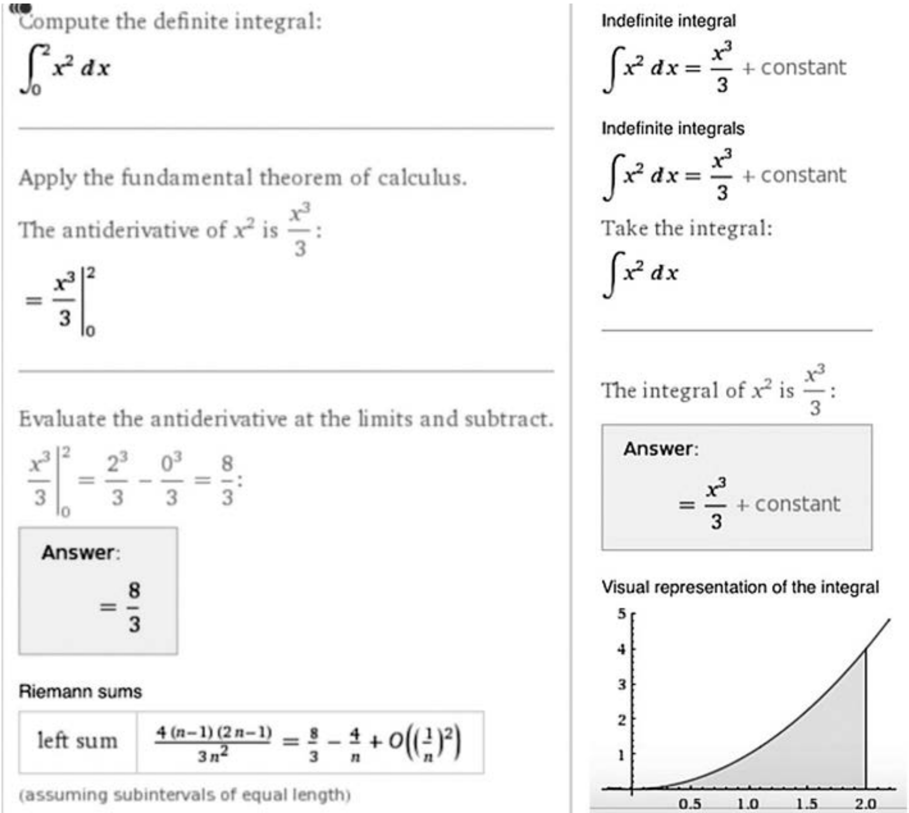
controlado ofrece al estudiante la oportunidad de explorar en tiempo real el comportamiento de algunos parámetros en forma visual o cuantificando atributos como longitudes de segmentos, medidas de ángulos o representaciones gráficas. El acercamiento y solución a este problema proporcionan información importante sobre los contenidos y formas de estructurar rutas para promover el aprendizaje de la geometría analítica (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). En este contexto, la competencia digital involucra que el profesor o individuo se apropie de la herramienta en el sentido de desarrollar experiencias que le permitan comprender los cambios que resultan en los contenidos, además de las estrategias que debe desarrollar el estudiante en la resolución de problemas. Santos-Trigo, Suaste y Figuerola (2015) afirman que el proceso de diseño de un artefacto o tecnología digital no termina cuando el producto sale de la empresa o taller que lo produce, incluye la consideración del proceso de apropiación del individuo o usuario que al interactuar con el artefacto construye esquemas cognitivos a fin de utilizarlo en la resolución de problemas.

Pensamiento o mente creativa

Es común ahora que muchas de las tareas que demandan la aplicación de un conocimiento o procedimiento rutinario sean realizadas por una herramienta o desarrollo digital. La figura 10 muestra lo que la aplicación Mathink de una tableta genera al escribir a mano la integral involucrada.

La existencia de herramientas digitales que pueden realizar cálculos y procedimientos matemáticos plantea la discusión de si los estudiantes deben seguir dedicando tiempo y atención al dominio de esas tareas. Se sugiere que los alumnos ahora pueden centrar la discusión en el significado de las ideas matemáticas involucrados en los procedimientos y resultados, y también buscar formas creativas de resolver los problemas. Gardner (2006) relaciona la mente creativa con la capacidad del individuo de descubrir, formular o clarificar nuevos problemas, preguntas o fenómenos. Afirma que un pensamiento creativo ocurre cuando un individuo o grupo genera un resultado o producto que la comunidad reconoce como innovador. Una mente creativa puede expresar representaciones múltiples de los problemas y desarrollar la tendencia de formular de manera constante preguntas y respuestas nuevas. Santos-Trigo (2014b) reconoce la importancia de que los estudiantes siempre busquen distintas maneras de resolver un problema. Ilustra, por ejemplo, seis formas de resolver el problema siguiente: "El fin de semana Pedro y María visitaron una granja donde se crían gallinas y cerdos. Pedro observó que en total había 19 cabezas, mientras María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en la granja?" Una solución creativa a este mismo problema involucra pensar que cada uno de los cerdos se sostenga con dos patas y las otras las mantenga al aire. Con esta condición, habrá 38 patas tocando el suelo ya que los cerdos al igual que las gallinas (19 en total)

Figura 10. Uso de Mathink en tareas matemáticas.



están sostenidos en dos patas. Esto significa que habrá 22 (60-38) patas en el aire y todas son de cerdos.

Comunicación y colaboración

La disponibilidad de diversas herramientas digitales resulta importante no sólo en la comunicación y discusión de resultados, sino también en la promoción de tareas de colaboración. Así el estudiante puede expresarse en forma oral, escrita, en videoconferencias, o en línea a través de los distintos medios de comunicación. Las redes sociales también pueden ser los medios para que los estudiantes compartan explicaciones de conceptos matemáticos o resuelvan problemas, y se pueden formar grupos con la intención de colaborar en la resolución de problemas. En este contexto, los participantes desarrollan habilidades para ser un miembro activo, escuchar a otros y reconocer las contribuciones de los demás.

Valores y principios éticos
El desarrollo notable de tecnologías digitales influye no sólo en las formas de producir y comunicar resultados o conocimiento disciplinar, sino además en el desarrollo personal y colectivo de los individuos. Los valores éticos resultan fundamentales para comprender y normar el funcionamiento de una sociedad con intereses individuales y colectivos diversos.

Conclusiones

En la presentación de las ideas de este capítulo se destaca que los desarrollos y la disponibilidad de diversas tecnologías digitales no están permeando únicamente las maneras de interactuar de los individuos, también afectan las formas de desarrollar, conocer y comprender conocimiento disciplinario. En este contexto surge la necesidad de incorporar el uso de la tecnología en las propuestas del currículum y en los escenarios de aprendizaje. Una idea o principio fundamental es que los estudiantes conceptualicen su aprendizaje en términos de dilemas y preguntas que ellos mismos formulan, exploran y responden vía el empleo sistemático de herramientas digitales. Así, el uso de estas diversas herramientas permite extender los razonamientos propiciados por el uso de lápiz y papel; y además ofrece a los estudiantes otras oportunidades para visualizar nuevas relaciones y plantear argumentos para sustentarlas. El alfabetismo o cultura digital resulta ser una de las competencias esenciales que los individuos deben adquirir, y que los profesores y alumnos deben mostrar en sus experiencias de aprendizaje. La apropiación de esta cultura digital involucra que el profesor y los estudiantes conozcan los cambios que produce el empleo de esas herramientas en los contenidos matemáticos y en la resolución de problemas. Por ejemplo, en el estudio de las secciones cónicas los modelos dinámicos muestran nuevas rutas para explorar sus propiedades y relaciones que extienden los razonamientos algebraicos. Algunos objetos o entes matemáticos, como la mediatriz y la excentricidad, resultan cruciales en la construcción de los modelos dinámicos. En la misma dirección, la búsqueda en línea de información relacionada con los temas en estudio demanda que los estudiantes desarrollen habilidades para seleccionar, discriminar, sintetizar e incorporarla en sus experiencias de aprendizaje. En este mismo sentido, los alumnos pueden usar videos en línea que contrasten o extiendan las explicaciones de conceptos que el profesor presenta en clase. En esta dirección se manifiesta la importancia de que los estudiantes trabajen en equipo e intercambien ideas de manera constante, y participen como miembros de una comunidad que valora la resolución de problemas. Por último, la comunicación e intervención de los estudiantes se debe enmarcar en el respeto a los demás y en la práctica de principios éticos, de modo que les permita reconocer y valorar las contribuciones individuales o grupales.

Referencias

Camarena, P. (2014). Un modelo para el diseño de material computacional interactivo. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, *69*, 3-16.

Gardner H. (2006). *Five Minds for the Future*. Boston: Harvard Business School Press.

Mishra, P. y Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.

Roschelle, J., Courey, S., Patton, C. y Murray, E. (2013). Dynabooks: Supporting teachers to engage all learners in key literacies. En C. Mouza y N. Lavigne (eds.). *Emerging Technologies for the Classroom, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies* (pp. 31-46). Nueva York: Springer Science+Business Media.

Santos-Trigo, M., Suaste, E. y Figuerola, P. (2015). Technology and tools appropriation in medical practices. En M. Khosrow-Pour (ed.), *Encyclopedia of Information Science and Technology* (3a. ed.) (pp. 5633-5640), Hershey: IGI Global.

Santos-Trigo, M. (2014a). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501), Nueva York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014). *Resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 279-302.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, *19*(3), 260-279.

Santos-Trigo, M. y Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technology in learning environments. En L. Uden *et al.* (eds.). *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 61-71). Nueva York: Springer (Communication in Computer and Informacion Science, 446).

Santos-Trigo, M. y Ortega-Moreno, F. (2013). Digital technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *Int. J. Learning Technology*, *8*(2), 186-200.

Schmidt, E. y Cohen, J. (2013) (eBook version). *The New Digital Age. Reshaping the Future of People, Nations and Business*. Nueva York: Random House.

Selden, J., Selden, A. y Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp. 19-26). Washington, DC: The Mathematical Association of America.